

**О ТОПОЛОГИИ ГРАФИКОВ ВАРИАЦИИ АЛЛАНА  
И ТИПОВЫХ ЗАБЛУЖДЕНИЯХ В ИНТЕРПРЕТАЦИИ СТРУКТУРЫ ШУМОВ ГИРОСКОПОВ**  
(На примере докладов Санкт-Петербургской международной конференции  
по интегрированным навигационным системам)

**Часть I**

**О РАЗЛИЧИИ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ НАКОПЛЕНИЯ ШУМОВ ГИРОСКОПОВ  
В ПЛАТФОРМЕННЫХ И БЕСПЛАТФОРМЕННЫХ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ**

**Часть II**

**ТЕХНИКА  $\sigma(\tau)$  ГРАФИКОВ АЛЛАНА  
ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ СТРУКТУРЫ ШУМОВ ГИРОСКОПОВ**

**Н. И. Кробка<sup>1</sup>**

НИИ прикладной механики имени академика В.И. Кузнецова (филиал ФГУП “ЦЭНКИ”),  
ООО “Научно-производственная фирма “Эпсилон”,  
Москва, Россия, e-mail: KrobkaNick@msn.com

*Отцам инерциальной навигационной техники  
для ракетно-космических применений  
Чарльзу Старку Дрейперу и Виктору Ивановичу Кузнецову  
и их командам разработчиков  
ПОСВЯЩАЕТСЯ*

**Аннотация**

**Ключевые слова:** шумы гироскопов, структура шумов, вариация Аллана, ориентация, инерциальные навигационные системы, точность

*Доклад посвящен методическим аспектам интерпретации графиков девиации Аллана и идентификации структуры шумов гироскопов. Цели работы: 1) методические замечания по поводу распространенных заблуждений и грубых ошибок в интерпретации графиков Аллана на примере опубликованных докладов предыдущих лет на Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам в части идентификации структуры шумов и оценок параметров шумов гироскопов различных типов; 2) постановка задачи расширения базиса шумовых процессов и учета неучтенных в существующих стандартах на гироскопы новых шумов различных типов для корректной идентификации структуры реальных шумов гироскопов; 3) демонстрация ранее не учтенных типов шумов и парциальных вкладов этих новых шумов в графики девиации Аллана. В этом состоит смысл краткого сообщения, предложенного автором a priori в качестве стендового доклада.*

*Но поскольку международный программный комитет конференции принял решение вынести этот доклад на “круглый стол”, увеличив время доклада в 5 раз, автор дополнил доклад еще одной частью в составе трех разделов (с пропорциональным расширением текста доклада для изложения нюансов обсуждаемого вопроса. А зачем иначе нужен “круглый стол”?): “О различии точности определения ориентации посредством БИНС и платформенных ИНС на одних и тех же гироскопах”, “Новый некоммутирующий кинематический эффект” и “Что такое “хорошо” и что такое “плохо” в части шумов гироскопов, предназначенных для применения в платформенных ИНС и в БИНС”, в которых объясняется: в чем различие строгих кинематических уравнений ошибок платформенных ИНС и БИНС; зачем нужна идентификация структуры шумов гироскопов; в какой форме представления нужна информация о шумах гироскопов; в чем состоит различие в необходимой детализации структуры шумов гироскопов, предназначенных для применения в платформенных ИНС и БИНС; в чем различие задач идентификации шумов в радиофизике – в стандартах частоты (“времени”) и в гироскопии.*

*Впервые в мире представлен новый некоммутирующий кинематический эффект: “Точность определения ориентации посредством платформенной ИНС и БИНС, построенных на одних и тех же гироскопах, различается да-*

же (ключевое слово – “даже”) при тождественно совпадающих погрешностях и шумах гироскопов в составе платформенной ИНС и БИНС”. Представлено и одно из наиболее существенных и актуальных проявлений этого эффекта: “Шумы гироскопов с равными нулю значениями спектральной плотности мощности шума на нулевой частоте не приводят к существенному росту во времени ошибки определения ориентации платформенной ИНС (эффект второго порядка “малости”), но приводят к весьма существенному росту во времени ошибки определения ориентации посредством БИНС (эффект первого порядка “малости”)”. Различие парциальных вкладов таких шумов в точность платформенных ИНС и БИНС составляет примерно в 10, 100, 1000 и в большее число раз в зависимости от конкретной структуры шумов гироскопов и вида вращения объекта.

Представлены три бесконечных (счетных) множества новых шумов и соответствующие им вариации Аллана.

В целях расширения возможностей идентификации структуры шумов гироскопов на основе метода вариации Аллана (и его обобщений) предложен дополнительный к вариации Аллана функционал – дисперсия Аллана-Кробки.

Продемонстрирован действенный уровень белых шумов ВОГ российской разработки (на примере ВОГ ООО НПК “Оптолинк”) – менее  $0,000001 \text{ град/ч}^{1/2}$  ( $10^{-6} \text{ град/ч}^{1/2}$ ).

## Введение

В первой части доклада впервые детально обсуждается различие накопления во времени ошибок определения ориентации (углового положения) платформенной инерциальной навигационной системой (ИНС) и бесплатформенной ИНС (БИНС), построенных на одних и тех же гироскопах (на любом физическом принципе) с произвольными погрешностями и шумами. Есть два эффекта, первый из них – общеизвестный, второй – новый и не тривиальный. Первый состоит в том, что точность определения ориентации посредством платформенной ИНС (далее, для краткости, – ИНС) и БИНС, построенных на одних и тех же гироскопах, различается. Этот эффект очевиден, т.к. гироскопы на гиростабилизированной платформе (ГСП) ИНС “отслеживают” более узкий диапазон угловых скоростей, чем гироскопы в БИНС. Поэтому составляющие ошибок гироскопов, пропорциональные угловой скорости и обусловленные погрешностями масштабных коэффициентов (и нелинейные по измеряемой угловой скорости ошибки для некоторых типов нелинейности) одного и того же гироскопа в ИНС, меньше чем в БИНС. Второй, более “тонкий”, ранее не публиковавшийся эффект, состоит в том, что точность ИНС и БИНС, построенных на одних и тех же гироскопах, различается даже (здесь ключевое слово – “даже”) при тождественно совпадающих погрешностях и шумах гироскопов в составе ИНС и БИНС. Например, если ошибки гироскопов содержат только аддитивные, не зависящие от измеряемой угловой скорости составляющие (тождественно равные в ИНС и в БИНС), темп накопления ошибки ориентации ИНС и БИНС, т.е. точность, различается (за исключением нескольких частных случаев). Различие в точности ориентации ИНС и БИНС может составлять порядки в 10, 100, 1000 и в большее число раз в зависимости от структуры шумов гироскопов и вида вращения объекта. Причем точнее может быть либо БИНС, либо ИНС. Этот эффект объясняет необходимость корректной идентификации структуры шумов гироскопов. Для гироскопов, предназначенных для БИНС, точная идентификация структуры шумов более критична, чем для гироскопов, предназначенных для платформенных ИНС.

Во второй части доклада на конкретных примерах из докладов Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам предыдущих лет представлены и детально прокомментированы типовые заблуждения четырех основных видов в интерпретации структуры шумов гироскопов на основе метода вариации Аллана.

1) Непонимание “азов” метода  $\sigma(\tau)$ -графиков девиации Аллана. Приведен пример ошибочной оценки уровня белых шумов микромеханических гироскопов (ММГ), некорректно оцениваемых по участку графика девиации Аллана с наклоном  $\Delta = -1/2$ . Величина ошибки – один-два порядка.

2) Непонимание эффекта “суммирования”  $\sigma(\tau)$ -графиков девиации Аллана. Типичные примеры – определение величины нестабильности нуля, используя касательную с наклоном  $\Delta = 0$  в точке минимума  $\sigma(\tau)$ -графика девиации Аллана. Получаемая таким образом оценка является, как правило, завышенной и отличается от действительного значения нестабильности нуля в разы и на порядок.

3) Непонимание “нюансов” метода вариации Аллана. Приведен пример ошибочной оценки уровня белых шумов волоконно-оптических гироскопов (ВОГ) в связи с эффектом “экранирования” марковскими процессами с малым временем корреляции. Величина ошибки – два-три порядка. Показано, что уровень белых шумов ВОГ российской разработки менее  $0,000001 \text{ град/ч}^{1/2}$  ( $10^{-6} \text{ град/ч}^{1/2}$ ).

4) Игнорирование неполноты используемого “базиса” шумов для идентификации структуры шумов гироскопов (в строгом соответствии с алгоритмом классического анекдота: “искать потерянную где-то вещь нужно под фонарем, потому что под фонарем светлее”) методом вариации Аллана.

Приведены примеры из практики, иллюстрирующие наличие шумов ВОГ, не учтенных в модели ошибок ВОГ, регламентированной стандартами IEEE Std 952-1997 и IEEE Std 952-1997 (R2008).

Ставится задача расширения “базиса” шумов для корректной идентификации структуры шумов. Представлены три бесконечных (счетных) множества новых шумов и соответствующие им вариации Аллана и парциальные вклады этих новых шумов в графики девиации Аллана. В целях расширения воз-

возможностей идентификации структуры шумов на основе метода вариации Аллана (и его обобщений) предложен дополнительный к вариации Аллана функционал – дисперсия Аллана-Кробки.

Продемонстрирован действительный уровень белых шумов ВОГ российской разработки (на примере ВОГ разработки ООО НПК “Оптолинк”) – менее  $0,000001 \text{ град}/(\text{ч})^{1/2}$  ( $10^{-6} \text{ град}/(\text{ч})^{1/2}$ ).

## 1. О различии точности определения ориентации посредством БИНС и платформенных ИНС на одних и тех же гироскопах

В июне 1960 года на симпозиуме “Frontiers of Science and Engineering Symposium” доктор Чарльз Старк Дрейпер – “отец инерциальной навигации”, он же “отец инерциального наведения”, как его называют в США [1-3], высказал свой личный прогноз о путях развития ИНС: “Автор считает, что высококачественные инерциальные системы, основанные на креплении чувствительных элементов к объекту, не относятся к числу перспективных систем” [4].

Такое мнение было основано, очевидно, на различии принципов построения ИНС на основе ГСП и БИНС. Действительно: в погрешностях и шумах  $\delta\omega(t)$  любых гироскопов содержатся составляющие трех разных типов: аддитивные  $a(t)$  (не зависящие от измеряемой угловой скорости  $\omega(t)$ ), линейные  $m(t)\omega(t)$  и нелинейные  $n(t,\omega(t))$  по измеряемой угловой скорости

$$\delta\omega(t) \equiv \delta\omega(\omega(t), t) = a(t) + m(t)\omega(t) + n(\omega(t), t). \quad (1.1)$$

В БИНС гироскопы, жестко прикрепленные к борту объекта, “отслеживают” весь диапазон угловых скоростей объекта  $\omega(t) \in [-\Delta\omega\{\text{SINS}\}, +\Delta\omega\{\text{SINS}\}]$  (типичные величины  $\Delta\omega\{\text{SINS}\} : \sim 10 \text{ град}/\text{с}; 100 \text{ град}/\text{с}; 1000 \text{ град}/\text{с}$  или более для быстро вращающихся объектов). Ошибка гироскопа имеет вид:

$$\delta\omega(t) \equiv \delta\omega(\omega(t), t) = a(t) + m(t)\omega(t) + n(\omega(t), t); \quad \omega(t) \in [-\Delta\omega\{\text{SINS}\}, +\Delta\omega\{\text{SINS}\}]. \quad (1.2)$$

В платформенной ИНС гироскопы, установленные на ГСП, при тех же угловых скоростях объекта  $\omega(t)$  “отслеживают” только узкий диапазон угловых скоростей  $\omega'(t) \in [-\Delta\omega\{\text{GSP}\}, +\Delta\omega\{\text{GSP}\}]$ , так как ГСП “отрабатывает” вращение объекта (например, с обратным знаком  $-\omega(t)$  в случае стабилизируемой в инерциальном пространстве ГСП с точностью до ошибок гироскопов  $\delta\omega'(t)$  и не идеальностей следящих систем ГСП  $\delta\omega'(t)\{\text{GSP}\}$ ). Типичные величины  $\Delta\omega\{\text{GSP}\} : 0,1; 0,01; 0,001 \text{ град}/\text{ч}$  или менее в зависимости от точности гироскопов и качества реализации следящих систем ГСП.

Ошибка гироскопа в составе ГСП имеет вид:

$$\delta\omega'(t) \equiv \delta\omega'(\omega'(t), t) = a(t) + m(t)\omega'(t) + n(\omega'(t), t); \quad \omega'(t) \in [-\Delta\omega\{\text{GSP}\}, +\Delta\omega\{\text{GSP}\}]. \quad (1.3)$$

Ошибки одного и того же гироскопа, используемого в ИНС (1.3) и в БИНС (1.2) разные в строгом соответствии с (1.1) и с принципами построения ИНС и БИНС. Например, если ГСП стабилизируется в инерциальном пространстве (такой вариант традиционно использовался в ракетных применениях, для которых Чарльз Старк Дрейпер со своей командой в США и Виктор Иванович Кузнецов со своей командой в СССР разрабатывали комплексы командных приборов для систем управления), то линейные составляющие  $m(t)\omega(t)$  ошибок (обусловленные неточностью определения и шумами масштабного коэффициента) одних и тех же гироскопов в случае их применения в ИНС и в БИНС будут различаться по порядку величины в  $\Delta\omega\{\text{GSP}\} / \Delta\omega\{\text{SINS}\}$  раз. Например, при  $\Delta\omega\{\text{SINS}\} \sim 10 \text{ град}/\text{с}$  и  $\Delta\omega\{\text{GSP}\} \sim 0,0001 \text{ град}/\text{ч}$  отношение  $\Delta\omega\{\text{GSP}\} / \Delta\omega\{\text{SINS}\}$  составляет  $\sim 3 \cdot 10^{-9}$  – “ни много, ни мало” – восемь порядков! Аналогично (но с точностью до конкретного вида нелинейности функции  $n(\omega(t), t)$ ) и для нелинейных составляющих ошибок (1.1). В предельном идеальном случае в платформенной ИНС

$$\Delta\omega\{\text{GSP}\} \rightarrow 0 \Rightarrow m(t)\omega'(t) \rightarrow 0, \quad (1.4)$$

а реально можно достичь величин линейных составляющих ошибок (1.3) гироскопа на ГСП много меньше, чем размер аддитивных составляющих ошибок (1.3)

$$|m(t)\omega'(t)| \ll |a(t)|. \quad (1.5)$$

В том, что ИНС обладают таким преимуществом по сравнению с БИНС, Ч. С. Дрейпер был, естественно, абсолютно прав. Гироскопы, установленные на ГСП, находятся в более “комфортных” условиях потому, что не отслеживают весь диапазон угловых скоростей объекта и “автоматически” проявляют лучшие точностные характеристики в ИНС, чем в БИНС. Это очевидно. Ч. С. Дрейпер отработал технологию платформенных ИНС до совершенства, – была создана сферическая плавающая платформа AIRS (Advanced Inertial Reference Sphere) [5, 6], в которой карданов подвес не использовался как таковой – это была уже бескарданная, но еще платформенная ИНС.

А что было бы в случае гироскопов, у которых во всем диапазоне угловых скоростей объекта выполняются *a priori* (“на столе”, а не в составе ГСП) условия

$$|m(t)\omega(t)| \ll |a(t)|; \quad \omega(t) \in [\omega_{\min}, \omega_{\max}]? \quad (1.6)$$

В 1960 году таких гироскопов не было. Стоявшие проблемы нужно было решать быстро. Что и было сделано. Как? Да как обычно решаются проблемы – “в три хода” [7]. Ход первый: был выбран лучший в то время (по критерию минимальности дрейфа – аддитивной составляющей  $a(t)$ ) поплавковый гироскоп. Ход второй: устранены присущие карданову подвесу погрешности (диалектично: путем отказа от него:  $\delta\omega'(t)\{GSP\} \rightarrow \min$ ). Ход третий: руками мастеров было сделано все возможное для достижения цели

$$\Delta\omega\{GSP\} \rightarrow \min \sim \max |a(t)|. \quad (1.7)$$

В результате точность ориентации навигационных блоков AIRS составила  $\sim 10^{-5}$  град/ч [5, 6], т.е. на уровне аддитивных дрейфов поплавковых гироскопов, как и должно было быть.

Ну а прогноз о том, что “высококачественные” БИНС “не относятся к числу перспективных систем” не оправдался. Почему? Потому что гироскопы, удовлетворяющие условию (1.6), вскоре были созданы. Полгода спустя, в декабре того же 1960 года были созданы неон-гелиевые лазеры [8], а 2 года спустя – прототипы лазерных гироскопов (ЛГ) [9], ставших основой для развития БИНС. После 20 лет отработки с начала 1980-х БИНС на ЛГ пришли на смену ИНС.

Итак. Есть очевидный известный эффект: «Точность определения ориентации (углового положения) посредством БИНС и платформенной ИНС, построенных на одних и тех же гироскопах, различается».

Но что будет в случае гироскопов, у которых во всем диапазоне угловых скоростей выполняются *a priori* условия (1.6)? Предельно упростим задачу. Рассмотрим модельный гироскоп, у которого есть только аддитивная составляющая погрешности (1.1):  $\delta\omega(t) \equiv a(t)$ . Используем три гироскопа, у которых есть только аддитивные составляющие погрешностей:  $\delta\omega_i(t) = a_i(t)$ ;  $i = 1, 2, 3$ . На основе этих гироскопов построим “идеальную” ИНС и “идеальную” БИНС, которые идеальны в том смысле, что в этих системах нет никаких других источников погрешностей, кроме аддитивных (одних и тех же и в БИНС, и в ИНС) погрешностей и шумов гироскопов. И сформулируем вопрос так: “Будут ли точности определения ориентации (углового положения) таких двух систем тождественно равны или будут различаться?”

Автор не сомневается в ответе (проверено тестированием этим вопросом профессионалов различного уровня и знатоков гироскопической и навигационной техники за период 1973-2015 годов): “Поскольку и ИНС, и БИНС идеальны в том смысле, что не содержат никаких других источников погрешностей, кроме аддитивных погрешностей и шумов гироскопов, которые будут одними и теми же как в платформенной ИНС, так и в БИНС, то и точности таких ИНС и БИНС будут тождественно равны. Это очевидно!”

Ответ неверный!

## 2. Новый некоммутативный кинематический эффект

Обсуждаемый эффект удобно пояснить следующими кинематическими диаграммами.

В случае абсолютно идеальной БИНС, в которой, по определению, отсутствуют любые погрешности, ее подсистема – бесплатформенная инерциальная система ориентации (БИСО) описывается диаграммой:

$$\begin{array}{ccc} A(\bar{\omega}_E) & & \\ I & \rightarrow & E \end{array} \quad (2.1)$$

Здесь ортонормированный неизменно связанный с бортом объекта базис  $E = E(t)$ , образованный осями чувствительности гироскопов, вращается относительно его начального положения  $I$  (инерциального базиса), матрица направляющих косинусов  $A = A(t) = A(\bar{\omega}_E(t))$  соответствует текущей во времени взаимной ориентации базисов  $I$  и  $E$ , соответствующей вращению объекта с вектором абсолютной угловой скорости  $\bar{\omega} = \bar{\omega}(t)$ , заданному проекциями  $\bar{\omega}_E = \bar{\omega}_E(t)$  в связанном базисе  $E$

$$\begin{aligned} E(t) &= \{\bar{e}_1(t), \bar{e}_2(t), \bar{e}_3(t)\} \equiv E; \quad E(t)|_{t=0} = \{\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3\} = I; \\ A &= A(t) = \|(\bar{e}_m(t) \cdot \bar{i}_n)\|; \quad A^{-1} = A^T = B = B(t) = \|(\bar{i}_m \cdot \bar{e}_n(t))\|; \quad \det A = \det B = +1; \\ \bar{\omega}(t) &= \sum_{p=1}^3 \omega_p(t) \bar{i}_p = \sum_{q=1}^3 \omega'_q(t) \bar{e}_q(t) \rightarrow \bar{\omega}_I(t) \equiv (\omega_1(t) \omega_2(t) \omega_3(t))^T; \quad \bar{\omega}_E(t) \equiv (\omega'_1(t) \omega'_2(t) \omega'_3(t))^T. \end{aligned}$$

Кинематические уравнения (КУ) Эйлера-Пуассона для матриц  $A$  и  $B$  имеют известный вид [10]:

$$\begin{aligned} \dot{A} &= -\Omega(\bar{\omega}_E)A \Leftrightarrow \dot{B} = B\Omega(\bar{\omega}_E) \Leftrightarrow \dot{A} = -A\Omega(\bar{\omega}_I) \Leftrightarrow \dot{B} = \Omega(\bar{\omega}_I)B; \quad A|_{t=0} = B|_{t=0} = I_0; \quad (2.2) \\ \Omega(\bar{\omega}_E) &= \begin{pmatrix} 0 & -\omega'_3 & \omega'_2 \\ \omega'_3 & 0 & -\omega'_1 \\ -\omega'_2 & \omega'_1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Omega(\bar{\omega}_I) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Omega(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}; \quad I_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь и далее аргумент  $t$  (время) у всех функций времени для краткости записи опущен.

В общем случае объект (связанный базис  $E$ ) вращается произвольно в инерциальном пространстве.

В БИСО по измеряемой гироскопами угловой скорости  $\bar{\omega}_E$  в результате интегрирования КУ вычисляется  $A(\bar{\omega}_E)$ , т. е. определяется ориентация базиса  $E$  относительно инерциального базиса  $I$ .

В реальном случае есть погрешности и шумы гироскопов  $\delta\bar{\omega}_E$ . По возмущенной угловой скорости  $\bar{\omega}_{*E} = \bar{\omega}_E + \delta\bar{\omega}_E$  вычисляется  $A_*(\bar{\omega}_{*E})$ . Поскольку независимо от наличия или отсутствия погрешностей гироскопов, базис  $E$ , в котором происходит измерение угловой скорости, остается одним и тем же, физическая интерпретация погрешности определения ориентации посредством БИНС однозначна – вращение возмущенного базиса  $I_*$  относительно инерциального базиса  $I$ .

Кинематическая диаграмма возмущенного функционирования БИСО принимает вид:

$$\begin{array}{c}
 I \\
 \begin{array}{c}
 A(\bar{\omega}_E) \\
 \searrow \\
 \downarrow \Delta A(\Delta\bar{\omega}_{I_*}) \quad E ; \\
 \nearrow \\
 A_*(\bar{\omega}_{*E}) \\
 I_*
 \end{array}
 \end{array}
 \quad ; \quad
 \begin{array}{l}
 \bar{\omega}_{*E} = \bar{\omega}_E + \delta\bar{\omega}_E \Rightarrow \\
 A(\bar{\omega}_E) = A_*(\bar{\omega}_{*E})\Delta A(\Delta\bar{\omega}_{I_*}) \Rightarrow \Delta A(\Delta\bar{\omega}_{I_*}) = B_*(\bar{\omega}_{*E})A(\bar{\omega}_E); \\
 \bar{\omega}_E = \bar{\omega}_{*E} + A_*(\bar{\omega}_{*E})\Delta\bar{\omega}_{I_*} \Rightarrow \Delta\bar{\omega}_{I_*} = -B_*(\bar{\omega}_{*E})\delta\bar{\omega}_E; \Delta\bar{\omega}_I = -B(\bar{\omega}_E)\delta\bar{\omega}_E; \\
 B_*(\bar{\omega}_{*E}) = A_*(\bar{\omega}_{*E})^{-1}; \quad B(\bar{\omega}_E) = A(\bar{\omega}_E)^{-1}.
 \end{array}
 \quad (2.3)$$

В случае абсолютно идеальной платформенной ИНС ее подсистема – ГСП описывается диаграммой:

$$\begin{array}{c}
 A(\bar{\omega}_E) \\
 \begin{array}{ccc}
 A'(\bar{\omega}_J) & & B''(\bar{\omega}_E'') \\
 I \rightarrow & J & \leftarrow E
 \end{array}
 \end{array}
 \quad ; \quad
 \begin{array}{l}
 A(\bar{\omega}_E) = A''(\bar{\omega}_E'')A'(\bar{\omega}_J); \\
 \bar{\omega}_E = \bar{\omega}_E'' + A''(\bar{\omega}_E'')\bar{\omega}_J; \\
 B''(\bar{\omega}_E'') = A''(\bar{\omega}_E'')^{-1}.
 \end{array}
 \quad (2.4)$$

Здесь дополнительно к (2.1) введен базис  $J$ , жестко связанный со стабилизируемой площадкой ГСП, на которой устанавливаются гироскопы и акселерометры. Переход  $I \rightarrow J$  на диаграмме (2.4) описывает программное вращение базиса  $J$  относительно базиса  $I$ . ГСП может стабилизироваться в инерциальном пространстве:  $J(t) \equiv I$ ; может вращаться так, чтобы при движении объекта площадка ГСП находилась в плоскости местного горизонта; может вращаться с произвольной программной угловой скоростью, в частности, воспроизводить вращение объекта:  $J(t) \equiv E(t)$ . Переход  $J \leftarrow E$  на диаграмме (2.4) описывает вращение ГСП относительно корпуса объекта, которое при произвольном вращении объекта  $A(\bar{\omega}_E)$  обеспечивает требуемое программное вращение ГСП  $A'(\bar{\omega}_J)$ .

Далее рассматривается часть диаграммы (2.4), представляющая интерес для обсуждаемого эффекта

$$\begin{array}{c}
 A'(\bar{\omega}_J) \\
 I \rightarrow J
 \end{array}
 \quad (2.5)$$

В случае платформенной ИНС из-за погрешностей гироскопов и не идеальности ГСП (погрешностей следящих систем ГСП) базис  $J$  физически “уходит” относительно его программного положения. Возмущенный базис обозначим  $J_*$ . Действительная угловая скорость базиса  $J_*$  в проекциях на его оси обозначается  $\bar{\omega}_{J_*}$ , а измеряемая гироскопами угловая скорость его вращения с учетом погрешностей гироскопов обозначается  $\bar{\omega}_{*J_*}$ . Погрешности гироскопов имеют вид:  $\delta\bar{\omega}_{J_*} = \bar{\omega}_{*J_*} - \bar{\omega}_{J_*}$ . Ориентация базиса  $J_*$  относительно базиса  $I$  определяется матрицей  $A'_*(\bar{\omega}_{*J_*})$ .

Кинематическая диаграмма возмущенного функционирования ГСП принимает вид:

$$\begin{array}{c}
 J \\
 \begin{array}{c}
 A'(\bar{\omega}_J) \\
 \nearrow \\
 \downarrow \Delta A'(\Delta\bar{\omega}_{J_*}) ; \\
 A'_*(\bar{\omega}_{*J_*}) \\
 \searrow \\
 J_*
 \end{array}
 \end{array}
 \quad ; \quad
 \begin{array}{l}
 A'_*(\bar{\omega}_{*J_*}) = \Delta A'(\Delta\bar{\omega}_{J_*})A'(\bar{\omega}_J) \Rightarrow \Delta A'(\Delta\bar{\omega}_{J_*}) = A'_*(\bar{\omega}_{*J_*})B'(\bar{\omega}_J); \\
 \bar{\omega}_{*J_*} = \Delta\bar{\omega}_{J_*} + \Delta A'(\Delta\bar{\omega}_{J_*})\bar{\omega}_J \Rightarrow \\
 \Delta\bar{\omega}_{J_*} = \bar{\omega}_{*J_*} - \Delta A'(\Delta\bar{\omega}_{J_*})\bar{\omega}_J = \bar{\omega}_{*J_*} - \bar{\omega}_{J_*} = \bar{\omega}_{J_*} + \delta\bar{\omega}_{J_*} - \bar{\omega}_{J_*} = \delta\bar{\omega}_{J_*}; \\
 \Delta\bar{\omega}_J = \Delta B'(\Delta\bar{\omega}_{J_*})\Delta\bar{\omega}_{J_*} = \Delta B'(\Delta\bar{\omega}_{J_*})\delta\bar{\omega}_{J_*}. \\
 B'(\bar{\omega}_J) = A'(\bar{\omega}_J)^{-1}; \quad \Delta B'(\Delta\bar{\omega}_{J_*}) = \Delta A'(\Delta\bar{\omega}_{J_*})^{-1}.
 \end{array}
 \quad (2.6)$$

В случае БИНС погрешность ориентации описывается любой из двух эквивалентных диаграмм, на которых вектор угловой скорости вращения базиса  $I_*$  относительно базиса  $I$  задан компонентами либо в базисе  $I_*$ , либо в базисе  $I$  (2.3):

$$\begin{array}{ccc} \Delta A(\Delta \bar{\omega}_{I_*}) & & \Delta A(\Delta \bar{\omega}_I) \\ I & \rightarrow & I_* \quad \Leftrightarrow \quad I & \rightarrow & I_* \\ \Delta \bar{\omega}_{I_*} = -B_*(\bar{\omega}_{*E})\delta \bar{\omega}_E & & \Delta \bar{\omega}_I = -B(\bar{\omega}_E)\delta \bar{\omega}_E \end{array} \quad (2.7)$$

В случае ИНС погрешность ориентации описывается любой из двух эквивалентных диаграмм, на которых вектор угловой скорости вращения базиса  $J_*$  относительно базиса  $J$  задан компонентами либо в базисе  $J_*$ , либо в базисе  $J$  (2.6):

$$\begin{array}{ccc} \Delta A'(\Delta \bar{\omega}_{J_*}) & & \Delta A'(\Delta \bar{\omega}_J) \\ J & \rightarrow & J_* \quad \Leftrightarrow \quad J & \rightarrow & J_* \\ \Delta \bar{\omega}_{J_*} = \delta \bar{\omega}_{J_*} & & \Delta \bar{\omega}_J = \Delta B'(\Delta \bar{\omega}_{J_*})\delta \bar{\omega}_{J_*} \end{array} \quad (2.8)$$

В случае стабилизации ГСП платформенной ИНС в инерциальном пространстве ( $J \equiv I$ ):

$$\begin{array}{ccc} \Delta A'(\Delta \bar{\omega}_{J_*}) & & \Delta A'(\Delta \bar{\omega}'_I) \\ I & \rightarrow & J_* \quad \Leftrightarrow \quad I & \rightarrow & J_* \\ \Delta \bar{\omega}_{J_*} = \delta \bar{\omega}_{J_*} & & \Delta \bar{\omega}'_I = \Delta B'(\Delta \bar{\omega}_{J_*})\delta \bar{\omega}_{J_*} \end{array} \quad (2.9).$$

При замене  $J \rightarrow I$  в (2.9) использовано другое обозначение:

$$\Delta \bar{\omega}_I = \Delta B'(\Delta \bar{\omega}_{J_*})\delta \bar{\omega}_{J_*} \rightarrow \Delta \bar{\omega}'_I = \Delta B'(\Delta \bar{\omega}_{J_*})\delta \bar{\omega}_{J_*}.$$

Ограничимся комментарием диаграмм (2.7) и (2.9), т.е. БИНС и ИНС, у которой ГСП стабилизируется в инерциальном пространстве. В случае ИНС “физический” базис  $J_*$ , связанный с ГСП, вращается (“уходит”) относительно инерциального базиса  $I$  с вектором абсолютной угловой скорости  $\Delta \bar{\omega}'(t)\{\text{GSP}\}$ . В случае БИНС “математический” базис  $I_*$  (аналог “физического” базиса ГСП) вращается (“уходит”) относительно инерциального базиса  $I$  с вектором абсолютной угловой скорости  $\Delta \bar{\omega}(t)\{\text{SINS}\}$

$$\Delta \bar{\omega}(t)\{\text{SINS}\} \equiv \Delta \bar{\omega}(t) \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \bar{\omega}_{I_*} = -B_*(\bar{\omega}_{*E})\delta \bar{\omega}_E; \\ \Delta \bar{\omega}_I = -B(\bar{\omega}_E)\delta \bar{\omega}_E \end{cases}; \quad \Delta \bar{\omega}(t)\{\text{GSP}\} \equiv \Delta \bar{\omega}'(t) \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \bar{\omega}_{J_*} = \delta \bar{\omega}_{J_*} \\ \Delta \bar{\omega}'_I = \Delta B'(\Delta \bar{\omega}_{J_*})\delta \bar{\omega}_{J_*} \end{cases}. \quad (2.10)$$

Пусть погрешности гироскопов в случаях БИНС и ИНС (в базисах, в которых измеряется абсолютная угловая скорость, т.е. в базисе  $E$  в случае БИНС и в базисе  $J_*$  в случае ИНС) тождественно равны:

$$\delta \bar{\omega}_{J_*}(t) \equiv \delta \bar{\omega}(t) \equiv \delta \bar{\omega}_E(t); \quad \delta \bar{\omega}(t) = (\delta \omega_1(t), \delta \omega_2(t), \delta \omega_3(t))^T. \quad (2.11)$$

Вращение базиса  $I_*$  (БИНС) и вращение базиса  $J_*$  (ИНС) происходит с разной угловой скоростью

$$\Delta \bar{\omega}(t)\{\text{SINS}\} \neq \Delta \bar{\omega}'(t)\{\text{GSP}\}, \quad (2.12)$$

что очевидно из (2.10), сравнивая  $\Delta \bar{\omega}(t)\{\text{SINS}\}$  и  $\Delta \bar{\omega}'(t)\{\text{GSP}\}$  с учетом (2.11) в одном и том же базисе  $I$ :

$$\Delta \bar{\omega}_I = -B(\bar{\omega}_E)\delta \bar{\omega}; \quad \Delta \bar{\omega}'_I = \Delta B'(\Delta \bar{\omega}_{J_*})\delta \bar{\omega}. \quad (2.13)$$

Вектор погрешностей и шумов гироскопов  $\delta \bar{\omega}$  (математический вектор – матрица-столбец) в случае БИНС модулируется вращением объекта:  $\Delta \bar{\omega}_I = -B(\bar{\omega}_E)\delta \bar{\omega}$ , а в случае ИНС – вращением (“уходом”) ГСП:  $\Delta \bar{\omega}'_I = \Delta B'(\Delta \bar{\omega}_{J_*})\delta \bar{\omega}$  (2.13). Поэтому, вращаясь с разными векторами угловой скорости, несмотря на то, что модули этих векторов тождественно равны

$$|\Delta \bar{\omega}(t)\{\text{SINS}\}| \equiv |\Delta \bar{\omega}'(t)\{\text{GSP}\}| = (\delta \bar{\omega}^T(t)\delta \bar{\omega}(t))^{1/2}, \quad (2.14)$$

базис  $J_*(t)$  относительно базиса  $I$  (ИНС) и базис  $I_*(t)$  относительно базиса  $I$  (БИНС) за одно и то же время поворачиваются на разные по величине углы результирующего эйлера поворота – на угол  $\Delta s(t)$  (в случае БИНС) и на угол  $\Delta s'(t)$  (в случае ИНС), т.е. точности БИНС и ИНС разные в общем случае (за редкими исключениями) произвольного вращения объекта и произвольных ошибок гироскопов  $\delta \bar{\omega}$ :

$$\Delta s(t)\{\text{SINS}\} \equiv \Delta s(t) \neq \Delta s'(t) \equiv \Delta s'(t)\{\text{GSP}\}. \quad (2.15)$$

Угол эйлера поворота  $\Delta s(t)$  и угол эйлера поворота  $\Delta s'(t)$  – естественные критерии точности ориентации посредством БИНС и ИНС. Прокомментируем эффект (2.15) и некоторые его проявления.

Матрицы  $\Delta A$  и  $\Delta B = \Delta A^{-1} = \Delta A^T$  погрешности ориентации БИНС и матрицы погрешности ориентации ИНС  $\Delta A'$  и  $\Delta B' = \Delta A'^{-1} = \Delta A'^T$  параметризуем векторами эйлера поворота  $\Delta \bar{S}$  и  $\Delta \bar{S}'$

$$\begin{aligned}\Delta A^{\pm 1} &= \Delta B^{\mp 1} = I_0 \mp (\sin \Delta s / \Delta s) \Omega(\Delta \bar{S}) + [(1 - \cos \Delta s) / \Delta s^2] \Omega^2(\Delta \bar{S}); \quad \Delta s = +(\Delta \bar{S}^T \Delta \bar{S})^{1/2}; \quad \Delta \bar{S} \equiv \Delta \bar{S}(t); \\ \Delta A'^{\pm 1} &= \Delta B'^{\mp 1} = I_0 \mp (\sin \Delta s' / \Delta s') \Omega(\Delta \bar{S}') + [(1 - \cos \Delta s') / \Delta s'^2] \Omega^2(\Delta \bar{S}'); \quad \Delta s' = +(\Delta \bar{S}'^T \Delta \bar{S}')^{1/2}; \quad \Delta \bar{S}' \equiv \Delta \bar{S}'(t).\end{aligned}\quad (2.16)$$

Векторы  $\Delta \bar{S}$  и  $\Delta \bar{S}'$  и углы  $\Delta s$  и  $\Delta s'(t)$  выражаются через матрицы  $\Delta A$  и  $\Delta A'$ :

$$\begin{aligned}- (\sin \Delta s / \Delta s) \Omega(\Delta \bar{S}) &= (\Delta A - \Delta A^T) / 2; \quad \cos \Delta s = (\text{Sp} \Delta A - 1) / 2 = (\text{Sp} \Delta A^T - 1) / 2; \\ - (\sin \Delta s' / \Delta s') \Omega(\Delta \bar{S}') &= (\Delta A' - \Delta A'^T) / 2; \quad \cos \Delta s' = (\text{Sp} \Delta A' - 1) / 2 = (\text{Sp} \Delta A'^T - 1) / 2.\end{aligned}\quad (2.17)$$

Для четырех матриц (2.16) можно получить по две формы КУ на основании общего вида КУ (2.2), соответствующих вращению некоторого базиса относительно неподвижного базиса, с учетом двух форм представления угловой скорости (2.10) для этих вращений. Из восьми КУ более удобны следующие пары:

$$\Delta \dot{A}' = -\Omega(\delta \bar{\omega}) \Delta A' \Leftrightarrow \Delta \dot{B}' = \Delta B' \Omega(\delta \bar{\omega}); \quad \Delta A'|_{t=0} = \Delta B'|_{t=0} = I_0; \quad (2.18)$$

$$\Delta \dot{A} = \Delta A \Omega(B \delta \bar{\omega}) \Leftrightarrow \Delta \dot{B} = -\Omega(B \delta \bar{\omega}) \Delta B; \quad \Delta A|_{t=0} = \Delta B|_{t=0} = I_0. \quad (2.19)$$

Уравнения (2.18) и (2.19) – это строгие КУ ошибок (без каких-либо предположений малости возмущений) соответственно платформенных ИНС и БИНС в общем случае произвольных погрешностей и шумов гироскопов  $\delta \bar{\omega} = \delta \bar{\omega}(t) = \delta \bar{\omega}(\bar{\omega}_E(t), t)$  и произвольного вращения объекта  $B = B(t) = B(\bar{\omega}_E(t))$ .

КУ ошибок ИНС (2.18) и БИНС (2.19) отличаются. Решения КУ (2.18) зависят только от ошибок гироскопов, а решения КУ (2.19) зависят и от ошибок гироскопов, и от вида вращения объекта. Точность ИНС на ГСП – это функционал одного параметра, а точность БИНС – функционал двух параметров:

$$\Delta s'(t) = \Delta s'(\delta \bar{\omega}(t)); \quad \Delta s(t) = \Delta s(\delta \bar{\omega}(t), B(t)). \quad (2.20)$$

Для сравнения решений КУ (2.18) и (2.19) удобно рассматривать пары КУ, для которых КУ либо “правые”, либо “левые” (т.е. в уравнениях матрица коэффициентов расположена либо справа, либо слева от искомой матрицы). Выберем, для определенности, пару “левых” КУ из (2.18) и (2.19):

$$\Delta \dot{A}' = -\Omega(\delta \bar{\omega}) \Delta A'; \quad \Delta A'|_{t=0} = I_0; \quad \Delta \dot{B} = -\Omega(B \delta \bar{\omega}) \Delta B; \quad \Delta B|_{t=0} = I_0 \quad (2.21)$$

и представим их решения абсолютно и равномерно сходящимся рядом последовательных приближений:

$$\Delta A' = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta A'_n; \quad \Delta A'_0 = I_0; \quad \Delta A'_{n+1} = -\int_0^t \Omega(\delta \bar{\omega}(\tau)) \Delta A'_n(\tau) d\tau; \quad \Delta B = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta B_n; \quad \Delta B_0 = I_0; \quad \Delta B_{n+1} = -\int_0^t \Omega(B(\tau) \delta \bar{\omega}(\tau)) \Delta B_n(\tau) d\tau. \quad (2.22)$$

Аналогично для векторов и углов эйлера поворота с учетом (2.22) и (2.17)

$$\begin{aligned}- \frac{\sin \Delta s}{\Delta s} \Omega(\Delta \bar{S}) &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (\Delta A_n - \Delta A_n^T); \quad \cos \Delta s = 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \text{Sp} \Delta A_n = 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \text{Sp} \Delta A_n^T; \\ - \frac{\sin \Delta s'}{\Delta s'} \Omega(\Delta \bar{S}') &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (\Delta A'_n - \Delta A_n'^T); \quad \cos \Delta s' = 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \text{Sp} \Delta A'_n = 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \text{Sp} \Delta A_n'^T.\end{aligned}\quad (2.23)$$

С учетом (2.21)-(2.23) результат (2.15) несложно и понять, и доказать. Действительно, несмотря на тождественное равенство модулей угловых скоростей (2.14) или в равносильной форме

$$+ \{ [\delta \bar{\omega}(t)]^T [\delta \bar{\omega}(t)] \}^{1/2} = + \{ [B(t) \delta \bar{\omega}(t)]^T [B(t) \delta \bar{\omega}(t)] \}^{1/2}, \quad (2.24)$$

модули интегралов векторов  $\delta \bar{\omega}(\tau)$  и  $B(\tau) \delta \bar{\omega}(\tau)$  в общем случае (если  $B(\tau) \neq I_0$ ) не совпадают

$$+ \{ [\int_0^t \delta \bar{\omega}(\tau) d\tau]^T [\int_0^t \delta \bar{\omega}(\tau) d\tau] \}^{1/2} \neq + \{ [\int_0^t B(\tau) \delta \bar{\omega}(\tau) d\tau]^T [\int_0^t B(\tau) \delta \bar{\omega}(\tau) d\tau] \}^{1/2}. \quad (2.25)$$

Эффект (2.15) проявляется в любом  $N$ -м ( $N \geq 1$ ) порядке метода последовательных приближений:

$$\Delta A' \approx \Delta A'^{\{N\}} \equiv \sum_{n=0}^N \Delta A'_n; \quad \Delta B \approx \Delta B^{\{N\}} = \sum_{n=0}^N \Delta B_n \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}- \frac{\sin \Delta s^{\{N\}}}{\Delta s^{\{N\}}} \Omega(\Delta \bar{S}^{\{N\}}) &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N (\Delta A_n - \Delta A_n^T); \quad \cos \Delta s^{\{N\}} = 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^N \text{Sp} \Delta A_n = 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^N \text{Sp} \Delta A_n^T; \\ - \frac{\sin \Delta s'^{\{N\}}}{\Delta s'^{\{N\}}} \Omega(\Delta \bar{S}'^{\{N\}}) &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N (\Delta A'_n - \Delta A_n'^T); \quad \cos \Delta s'^{\{N\}} = 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^N \text{Sp} \Delta A'_n = 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^N \text{Sp} \Delta A_n'^T \Rightarrow\end{aligned}\quad (2.26)$$

$$\Delta \bar{S}^{\{N\}} = \sum_{n=1}^N \varepsilon^n \Delta \bar{S}_n; \quad \Delta \bar{S}'^{\{N\}} = \sum_{n=1}^N \varepsilon^n \Delta \bar{S}'_n; \quad \Delta s^{\{N\}} = (\Delta \bar{S}^{\{N\}T} \Delta \bar{S}^{\{N\}})^{1/2}; \quad \Delta s'^{\{N\}} = (\Delta \bar{S}'^{\{N\}T} \Delta \bar{S}'^{\{N\}})^{1/2}. \quad (2.27)$$

и может быть подтвержден этим методом с любой точностью. Параметр  $\varepsilon \equiv 1$  введен в (2.27) для удобства построения рядов (2.27) методом последовательных приближений на основе (2.26).

Автору известны только три исключения из общего правила (2.15): 1) В редком (но возможном) для применений гироскопов случае полного вращения объекта для произвольных погрешностей и шумов гироскопов. Это очевидно, поскольку при отсутствии вращения объекта КУ ошибок БИНС и ИНС (2.21) тождественно совпадают. 2) В редком (но возможном) случае, когда вектор ошибок гироскопов является собственным вектором, соответствующим собственному числу +1 матрицы вращения объекта:  $\delta\bar{\omega}(t) = B(t)\delta\bar{\omega}(t)$ . 3) В недостигнутом к настоящему времени случае наличия в ошибках гироскопов  $\delta\bar{\omega}$  только белых гауссовых шумов при произвольном вращении объекта.

Для оценок величины эффекта (2.15) при выполняемых на практике условиях “малости” ошибок гироскопов и ошибок ориентации (это независимые условия) ИНС и БИНС

$$\left\{ \left[ \int_0^t \delta\bar{\omega}(\tau) d\tau \right]^T \left[ \int_0^t \delta\bar{\omega}(\tau) d\tau \right] \right\}^{1/2} \ll 1; \Delta s'(t) \ll 1; \left\{ \left[ \int_0^t B(\tau) \delta\bar{\omega}(\tau) d\tau \right]^T \left[ \int_0^t B(\tau) \delta\bar{\omega}(\tau) d\tau \right] \right\}^{1/2} \ll 1; \Delta s(t) \ll 1 \quad (2.28)$$

можно, (за исключениями случаев некоммутирующих кинематических эффектов (НКЭ)  $N$ -го порядка,  $N > 2$  [11-13]), ограничиться вторым порядком метода последовательных приближений (2.29) [14-22]

$$\Delta\bar{S}(t) \equiv \varepsilon^1 \int_0^t \Delta\bar{\omega}(t_1) dt_1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} [\Delta\bar{\omega}(t_2) \times \Delta\bar{\omega}(t_1)] dt_1; \quad \Delta\bar{\omega}(t) = -B(t)\delta\bar{\omega}(t); \quad (2.29)$$

$$\Delta\bar{S}'(t) \equiv \varepsilon^1 \int_0^t \delta\bar{\omega}(t_1) dt_1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} [\delta\bar{\omega}(t_2) \times \delta\bar{\omega}(t_1)] dt_1. \quad (2.30)$$

В первом приближении решения КУ ошибок (это приближение совпадает с точным решением широко используемых приближенных КУ ошибок “в вариациях”) имеют вид:

$$\Delta\bar{S}(t) \equiv \varepsilon^1 \delta\bar{\theta}(t) \equiv -\varepsilon^1 \int_0^t B(t_1) \delta\bar{\omega}(t_1) dt_1; \quad \Delta\bar{S}'(t) \equiv \varepsilon^1 \delta\bar{\theta}'(t) \equiv \varepsilon^1 \int_0^t \delta\bar{\omega}(t_1) dt_1. \quad (2.31)$$

Для вычисления дисперсии угла погрешности ориентации БИНС и ИНС с учетом шумов в  $\delta\bar{\omega}(t)$

$$\sigma_{\Delta s}^2(t) = \langle \Delta s^2(t) \rangle - \langle \Delta s(t) \rangle^2; \quad \Delta s(t) = +[\Delta\bar{S}^T(t)\Delta\bar{S}(t)]^{1/2}; \quad \sigma_{\Delta s'}^2(t) = \langle \Delta s'^2(t) \rangle - \langle \Delta s'(t) \rangle^2; \quad \Delta s'(t) = +[\Delta\bar{S}'^T(t)\Delta\bar{S}'(t)]^{1/2} \quad (2.32)$$

при использовании  $N$ -х приближений (2.27), в том числе и первого приближения (2.31), необходимы функции распределения случайного векторного процесса  $\delta\bar{\omega}(t)$ . Для вычисления средних квадратов углов (2.31) достаточно только статистических моментов до  $2N$ -го порядка, но для вычисления средних углов (с учетом нелинейной операции – извлечения квадратного корня) моментов недостаточно, – нужна функция распределения, которую экспериментально определить непросто. В смеси шумов могут быть шумы, подчиняющиеся различным статистикам. Например, статистика фотоотсчетов – пуассоновская [23] и в ВОГ будет смесь пуассоновских и гауссовых шумов. В ЛГ такой проблемы нет, в силу различия принципов съема информации: в ВОГ измеряется фототок, а в ЛГ подсчитывается количество интерференционных полос, “пробегающих” две площадки фотоприемника.

Но эту отмеченную трудность можно обойти – использовать вместо дисперсии другой близкий по смыслу функционал [11] (названный коллегами в НИИ прикладной физики в начале 1980-х: “дисперсия Кробки”), традиционно называемый автором “дисперсия ошибки ориентации БИНС” (или ИНС)

$$\sigma_{\Delta s+}^2(t) \equiv \langle \Delta\bar{S}^T(t)\Delta\bar{S}(t) \rangle - \langle \Delta\bar{S}^T(t) \rangle \langle \Delta\bar{S}(t) \rangle; \quad \sigma_{\Delta s'+}^2(t) \equiv \langle \Delta\bar{S}'^T(t)\Delta\bar{S}'(t) \rangle - \langle \Delta\bar{S}'^T(t) \rangle \langle \Delta\bar{S}'(t) \rangle. \quad (2.33)$$

Для вычисления “дисперсий” (2.33) функция распределения шумов  $\delta\bar{\omega}(t)$ , очевидно, не требуется.

“Дисперсии ошибок” ориентации БИНС или ИНС (2.33) превышают по величине дисперсии углов  $\Delta s(t)$  или  $\Delta s'(t)$ , но не превышают величину вторых моментов (а запас по точности никому не мешает)

$$\langle \Delta s^2(t) \rangle \geq \sigma_{\Delta s+}^2(t) \geq \sigma_{\Delta s}^2(t); \quad \langle \Delta s'^2(t) \rangle \geq \sigma_{\Delta s'+}^2(t) \geq \sigma_{\Delta s'}^2(t), \quad (2.34)$$

что очевидно, поскольку из равенства нулю среднего значения вектора ошибки гироскопов не следует равенство нулю средних значений векторов эйлеровых поворотов:

$$\langle \delta\bar{\omega}(t) \rangle = \bar{0} \leftrightarrow \langle \Delta\bar{S}(t) \rangle \neq \bar{0}; \quad \langle \Delta\bar{S}'(t) \rangle \neq \bar{0}. \quad (2.35)$$

В случае гауссовой статистики шумов с учетом эффекта “расщепления корреляций” моментов любого четного порядка на произведения моментов второго порядка для оценок точности ориентации БИНС и ИНС в любом порядке метода последовательных приближений достаточно знать только корреляционную матрицу шумов, в общем случае – нестационарных

$$K(t_1, t_2) = \langle \delta\bar{\omega}(t_1) \delta\bar{\omega}^T(t_2) \rangle - \langle \delta\bar{\omega}(t_1) \rangle \langle \delta\bar{\omega}^T(t_2) \rangle = \|k_{ij}(t_1, t_2)\|; \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2.36)$$

Например, для квантовых шумов гироскопов, моделируемых стационарным гауссовым белым шумом ( $\delta(t_1 - t_2)$  – дельта-функция Дирака,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера,  $[D_i^{1/2}] = \text{град}/(\text{ч})^{1/2}$ ):

$$\delta\bar{\omega}(t) = \bar{\xi}(t); \langle \bar{\xi}(t) \rangle = \bar{0}; \langle \bar{\xi}_i(t_1)\bar{\xi}_j(t_2) \rangle = D_i\delta_{ij}\delta(t_1 - t_2); i, j = 1, 2, 3, \quad (2.37)$$

усредняя и суммируя ряды (2.22), получаем точное среднее значение решения КУ ошибок БИНС (для компактности записи результата принято  $D_1 = D_2 = D_3 \equiv D$ ) [11, 22]

$$\langle \Delta A(t) \rangle = \langle \Delta B(t) \rangle = \langle \Delta A'(t) \rangle = \langle \Delta B'(t) \rangle = e^{-Dt} I_0. \quad (2.38)$$

Дисперсии ошибок ориентации БИНС и ИНС (2.33) для произвольного вращения объекта также не зависят от конкретного вида вращения  $B(t)$  и совпадают по величине, а в случае  $Dt \ll 1$  имеют вид

$$\sigma_{\Delta s^+}^2(t) = \sigma_{\Delta s'^+}^2(t) = 3Dt + O((3Dt)^2). \quad (2.39)$$

В зависимости от структуры погрешностей и шумов гироскопов (ограничимся здесь аддитивными составляющими (1.1): “медленно” изменяющимися во времени дрейфами нулей гироскопов  $\delta\bar{\omega}_m(t)$  и “быстро” изменяющимися во времени шумами  $\bar{\zeta}_n(t)$ )

$$\delta\bar{\omega}(t) = \sum_m \delta\bar{\omega}_m(t) + \sum_n \bar{\zeta}_n(t) \quad (2.40)$$

и от вида вращения объекта ( $\bar{S} = \bar{S}(t)$ ) - вектор эйлера поворота объекта в инерциальном пространстве)

$$B(\bar{S}) = I_0 + (\sin s / s)\Omega(\bar{S}) + [(1 - \cos s) / s^2]\Omega^2(\bar{S}); s = +(\bar{S}^T \bar{S})^{1/2}; \bar{S} = \bar{S}(t) \quad (2.41)$$

точнее может быть либо БИНС, либо ИНС. Вклады различных погрешностей и шумов гироскопов (2.41) в погрешность ориентации БИНС и ИНС могут различаться не только в разы, но и на порядки.

**П е р в ы й п р и м е р.** Поскольку в случае БИНС ошибки гироскопов модулируются вращением объекта, в БИНС “автоматически” реализуется режим “каруселирования”. Рассмотрим простой случай постоянных смещений нулей гироскопов и вращения объекта с постоянной угловой скоростью

$$\delta\bar{\omega}_m(t) \rightarrow \delta\bar{\omega}_0; \delta\dot{\bar{\omega}}_0 = \bar{0}; \bar{\omega}_E(t) = \bar{\omega}_I(t) = \bar{\omega}; \dot{\bar{\omega}} = \bar{0}; (\delta\bar{\omega}_0^T \delta\bar{\omega}_0)^{1/2} = \delta\omega_0; (\bar{\omega}^T \bar{\omega})^{1/2} = \omega. \quad (2.42)$$

В случае ИНС очевидны точные выражения:  $\Delta\bar{S}'(t) = \delta\bar{\omega}_0 t \Rightarrow \Delta s'(t) = \delta\omega_0 t$ . В случае БИНС в первом приближении:  $\Delta\bar{S}(t) = [\bar{\omega}(\bar{\omega}^T \delta\bar{\omega}_0) / \omega^2] t$  (удержан только накапливающийся вклад). В предположении равновероятного направленного вектора угловой скорости отношение ошибки БИНС к ошибке ИНС имеет вид:  $|\Delta s(t)| / |\Delta s'(t)| = 2 / \pi$ . Постоянные смещения нулей и “медленно” изменяющиеся во времени дрейфы нулей гироскопов  $\delta\bar{\omega}_m(t)$  (2.40) при наличии вращения объекта ( $B(t) \neq I_0$ ) вносят меньший вклад в ошибку ориентации БИНС  $\Delta s(t)$ , чем в ошибку ориентации платформенной ИНС  $\Delta s'(t)$ .

**В т о р о й п р и м е р.** Для “быстро” изменяющихся во времени шумов гироскопов  $\bar{\zeta}_n(t)$  (2.40) ситуация противоположная. Существует широкий класс стационарных шумов с равной нулю спектральной плотностью мощности шума в угловой скорости  $S_\omega(v)$  на нулевой частоте

$$S_\omega(0) \equiv S_\omega(v=0) \equiv S_\omega(v)|_{v=0} = 0, \quad (2.43)$$

которые в первом приближении ( $\sim \varepsilon$ ) не приводят к росту во времени погрешности ориентации ИНС. Это очевидно, так как дисперсия интеграла от случайного процесса, обладающего спектральной плотностью мощности шума вида (2.43), не возрастает во времени при временах, превышающих время корреляции такого процесса. Однако, такие шумы в том же первом приближении ( $\sim \varepsilon$ ) приводят к росту во времени погрешности ориентации БИНС при произвольном вращении объекта ( $B(t) \neq I_0$ )

$$S_\omega(0) \equiv S_\omega(v=0) \equiv S_\omega(v)|_{v=0} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{\Delta s'^+}^2(t) \leq \text{const}; \\ \sigma_{\Delta s^+}^2(t) \sim t. \end{cases} \quad (2.44)$$

Удобной моделью для оценок влияния стационарных шумов типа (2.43) на точность ориентации платформенных ИНС и БИНС являются производные n-го порядка от белого шума  $\xi(t)$

$$\xi^{(n)}(t) \equiv \frac{d^n}{dt^n} \xi(t) \Rightarrow k^{[n]}(\tau) \equiv \langle \xi^{(n)}(t)\xi^{(n)}(t+\tau) \rangle = (-1)^n \frac{d^{2n}}{d\tau^{2n}} D\delta(\tau); S_\omega^{[n]}(v) = v^{2n} \cdot \text{const}. \quad (2.45)$$

Автокорреляционные функции  $k^{[n]}(\tau)$  и спектральные плотности мощности шума  $S_\omega^{[n]}(v)$  производных  $\zeta^{(n)}(t)$  n-го порядка (при условии их существовании) от стационарного процесса  $\zeta(t)$  с автокорреляционной функцией  $k(\tau) = \langle \zeta(t)\zeta(t+\tau) \rangle$  и спектральной плотностью мощности шума  $S_\omega(v)$  связаны с функциями  $k(\tau)$  и  $S_\omega(v)$  соотношениями [25]

$$\zeta^{(n)}(t) \equiv \frac{d^n}{dt^n} \zeta(t) \Rightarrow k^{[n]}(\tau) \equiv \langle \zeta^{(n)}(t)\zeta^{(n)}(t+\tau) \rangle = (-1)^n \frac{d^{2n}}{d\tau^{2n}} k(\tau); S_\omega^{[n]}(v) = v^{2n} S_\omega(v); \quad (2.46)$$

$$k(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\omega}(v) e^{iv\tau} dv \Leftrightarrow S_{\omega}(v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k(\tau) e^{-iv\tau} d\tau; \quad k^{[n]}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\omega}^{[n]}(v) e^{iv\tau} dv \Leftrightarrow S_{\omega}^{[n]}(v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k^{[n]}(\tau) e^{-iv\tau} d\tau.$$

Здесь  $\langle \dots \rangle$  – усреднение по ансамблю,  $\langle \zeta(t) \rangle = 0 \Rightarrow \langle \zeta^{(n)}(t) \rangle = 0$ .

При отсутствии вращения объекта шумы гироскопов типа (2.45) и (2.46) приводят к росту во времени ошибок ориентации и ИНС, и БИНС, которые тождественно равны. В зависимости от крутизны спектров (2.45), (2.46) вблизи нулевой частоты  $\sim v^{2N}$  возрастающие во времени ошибки ориентации учитываются, только начиная с (N+1)-го приближения ( $\sim \epsilon^{N+1}$ ) решений КУ ошибок. Это очевидно, т.к. нестационарный случайный процесс можно получить из продифференцированного n раз случайного стационарного случайного процесса, только проинтегрировав его (N+1) раз. С ростом N эффекты N-го порядка уменьшаются по величине  $\sim \mu^N$ , где  $\mu \ll 1$ . При наличии вращения объекта шумы (2.45), (2.46) приводят к росту ошибок ориентации БИНС в первом приближении ( $\sim \epsilon$ ) решений КУ ошибок [11, 17].

В общем случае произвольных стационарных шумов гироскопов, но в частном случае вращения объекта с постоянной угловой скоростью парциальный вклад таких шумов в погрешность ориентации БИНС возрастает во времени диффузионно. При этом коэффициент диффузии зависит от модуля угловой скорости объекта  $\omega$  в соответствии с зависимостью спектральной плотности мощности шума от частоты (при некоррелированных шумах в трех каналах трехосного гироскопа с равными интенсивностями) [26]:

$$\sigma_{\Delta s+}^2(t) \equiv D(\omega)t; \quad D(\omega) = [S_{\omega}(0) + 2S_{\omega}(\omega)]; \quad S_{\omega}(0) \equiv S_{\omega}(v)|_{v=0}; \quad S_{\omega}(\omega) \equiv S_{\omega}(v)|_{v=\omega}. \quad (2.47)$$

В общем случае произвольного вращения объекта, но в частном случае шумов в виде производной первого порядка от белого шума дисперсия погрешности ориентации БИНС зависит только от модуля вектора угловой скорости [11, 15]

$$\langle \delta \bar{\omega}_E(t_1) \delta \bar{\omega}_E^T(t_2) \rangle = Q \tau_0^2 \frac{d^2}{dt_1 dt_2} \delta(t_1 - t_2) I_0 \Rightarrow \sigma_{\Delta s+}^2(t) \equiv 2Q \tau_0^2 \int_0^t |\bar{\omega}(\tau)|^2 d\tau. \quad (2.48)$$

Источники шумов типа (2.43) в различных гироскопах разные. В ЛГ – это некомпенсированные составляющие “частотных подставок” типа (2.45), (2.46) [11, 27].

### 3. Что такое “хорошо” и что такое “плохо” в части шумов гироскопов, предназначенных для применения в платформенных ИНС и в БИНС

Этот раздел написан для молодых разработчиков, которые включились в разработки гироскопов для БИНС, не имея опыта создания платформенных ИНС и гироскопов для таких систем.

Прокомментируем проявление (2.44) НКЭ (2.15), которое оказалось неожиданно актуальным на переходном этапе – от платформенных ИНС к БИНС.

Замеченный с первых шагов построения строгой теории БИНС на ЛГ [11] (на этапе вывода строгих уравнений ошибок БИНС на рубеже 1979-1980 гг. [28]) НКЭ (2.15) был для автора просто “побочным продуктом” и никогда ранее не публиковался “за ненадобностью”.

С начала 1950-х годов для анализа ошибок ИНС [29], а позже и БИНС всеми и повсеместно (и в США, и в СССР) использовались приближенные уравнения ошибок – уравнения в вариациях [30, 31], в т.ч. и КУ ошибок [32-34], независимо от используемых формализмов. Эта тенденция продолжается и до настоящего времени и в США [35], и в России [36]. Поэтому первоочередная забота автора состояла в том, чтобы “навести порядок” в рамках создававшейся теории БИНС, – ЛГ разрабатывались для БИНС.

Ситуация была парадоксальной: в механической гироскопии давно были известны “неголономные ошибки” (теорема А.Ю. Ишлинского “О телесном угле” [37, 38]), а в качестве КУ ошибок в теории инерциальной навигации продолжали использовать не точные, а приближенные уравнения в вариациях, которые принципиально не учитывают эти эффекты (второго порядка  $\sim \epsilon^2$ ) [29-31, 39-41].

При исследовании особенностей применения ЛГ в БИНС был обнаружен “антипод” неголономных ошибок – тождественный в математическом выражении, но противоположный по физическому смыслу эффект второго порядка ( $\sim \epsilon^2$ ). Некомпенсированные периодические частотные подставки ЛГ

$$\delta \bar{\omega}(t) = (\alpha_1 \sin(vt + \varphi_1) \quad \alpha_2 \sin(vt + \varphi_2) \quad \alpha_3 \sin(vt + \varphi_3))^T = \bar{c}_1 \sin vt + \bar{c}_2 \cos vt \quad (3.1)$$

соответствуют фиктивному не финитному вращению (при неравенстве фаз  $\varphi_i$ ). Ошибка ориентации БИНС (при отсутствии вращения объекта) возрастает со скоростью  $\Delta s(t)/t = \varepsilon^2 \alpha^2 v \cdot \text{const}$ , где  $\alpha \sim \alpha_1 \sim \alpha_2 \sim \alpha_3$ , для равновероятного распределения фаз  $\varphi_i$  в интервале  $(-\pi, +\pi)$   $\text{const} \sim (3/2)^{1/2} / 8$ ). Для типичных значений параметров  $\alpha = (2-10)$  угл. мин.,  $v/2\pi = (100-500)$  Гц величина эффекта такова  $\alpha^2 v \cdot \text{const} \sim (7-700)$  град/ч. Известно и точное решение КУ в квадратурах для вращения с угловой скоростью (3.1) в частных случаях  $\bar{c}_1^T \bar{c}_1 = \bar{c}_2^T \bar{c}_2$ ;  $\bar{c}_1^T \bar{c}_2 = 0$  [11]. Парадоксально, но факт: столь “большой” по величине эффект (хотя это эффект второго порядка  $\sim \varepsilon^2$ ) не позволяли (и не позволяют) заметить используемые повсеместно приближенные КУ ошибок в вариациях.

В процессе исследований влияния различных погрешностей и шумов ЛГ на точность ориентации БИНС на основе строгих КУ ошибок, были выяснены общие закономерности накопления различных составляющих погрешностей и шумов ЛГ в результирующую погрешность ориентации БИНС [11, 14]:

$$1) \Delta \bar{S}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \Delta \bar{S}_n(t) \rightarrow \Delta \bar{S}(t) \cong \varepsilon^1 \Delta \bar{S}_1(t) = \Delta \bar{\theta}(t); \Delta \bar{\theta}(t) \cong \int_0^t B(\tau) \delta \bar{\omega}(\tau) d\tau; \quad (3.2)$$

$$2) \Delta \bar{S}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \Delta \bar{S}_n(t) \rightarrow \Delta \bar{S}(t) \cong \varepsilon^1 \Delta \bar{S}_1(t) = \delta \bar{\theta}(t); \delta \bar{\theta}(t) \cong \int_0^t \delta \bar{\omega}(\tau) d\tau; \quad (3.3)$$

$$3) \Delta \bar{S}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \Delta \bar{S}_n(t) \rightarrow \Delta \bar{S}(t) \cong \varepsilon^1 \Delta \bar{S}_1(t) + \varepsilon^n \Delta \bar{S}_n(t). \quad (3.4)$$

В выражениях (3.2), (3.3) и (3.4) удержаны только главные члены ряда (2.27) решений КУ ошибок, т.е. остальными членами ряда (2.27) можно пренебречь по малости в сравнении с удержанными. К первому типу относятся многие составляющие погрешностей и шумов гироскопов. Для таких и только для таких погрешностей и шумов можно ограничиться решением приближенных КУ ошибок в вариациях. Ко второму типу относятся (для произвольного вращения объекта) белые шумы в угловой скорости и нелинейные ошибки ЛГ, обусловленные эффектом “захвата” частот встречных волн ЛГ [27]. К третьему типу относятся периодические погрешности (3.1) и шумы типа (2.43), (2.45). Соотношение величин членов первого и N-го порядков зависит от вида вращения объекта.

Все результаты исследования влияния погрешностей и шумов гироскопов на точность ориентации БИНС заменой:  $B(t) \rightarrow I_0$  превращаются в результаты исследования влияния погрешностей и шумов гироскопов на точность ориентации платформенных ИНС.

Парадоксально, но факт: только недавно автор заметил, что новое поколение разработчиков БИНС и гироскопов для БИНС разных типов, в т.ч. модернизаций гироскопов, разрабатывавшихся в 1950-1980 годах для применения в платформенных ИНС, эффекта (2.15) не знает и может совершить ошибки в силу незнания следующего эффекта – одного из наиболее ярких проявлений НКЭ (2.15) (рис. 3.1).

*“Шумы гироскопов с равными нулю значениями спектральной плотности мощности шума на нулевой частоте  $S_{\omega}(v=0) = 0$  не приводят к существенному росту во времени ошибки определения ориентации платформенной ИНС (эффект второго порядка), но приводят к весьма существенному росту во времени ошибки определения ориентации БИНС (эффект первого порядка). Различие парциальных вкладов таких шумов в точность платформенных ИНС и БИНС составляет порядки (в 10, 100, 1000 и в большее число раз) в зависимости от конкретной структуры шумов гироскопов и вида вращения объекта”.*

*(Инженер НИИ ПФ, 1979-1980, Н.И. Кробка)*

Рис. 3.1. “Побочный продукт” построения строгой теории БИНС на ЛГ на основе строгих уравнений ошибок [11]



Рис. 3.2. Учиться никогда никому не поздно.  
 “Век живи, век учись” (народная мудрость) [42]

Результат (рис. 3.1) порадовал бы доктора Чарльза Старка Дрейпера как дополнительный аргумент к аргументу, изложенному в п. 1, в пользу платформенных ИНС. Такой шанс у Ч. Дрейпера был – работы [26, 27] опубликованы в англоязычных версиях [43, 44] и замечены NASA [45].<sup>1\*)</sup>

А суть дела вот в чём. В 1950-1980-х годах команда Чарльза Старка Дрейпера в США и команда В.И. Кузнецова в СССР разрабатывали для систем управления создававшейся и непрерывно модернизируемой ракетной техники комплексы командных приборов на ГСП, соревнуясь в их точности [51]. Естественным критерием качества (точности) ГСП была величина “ухода” ГСП. Поэтому при совершенствовании гироскопов устранялись все те источники погрешностей, которые приводили к “уходу” ГСП. А на устранение других погрешностей гироскопов, которые не приводили к “уходу” ГСП, внимания особо не обращали. Отчасти потому, что времени на это не было, – шла напряженная гонка за точность ГСП.

В то же время в механической гироскопии сложилась традиция: качество гироскопов определять “интегральным” параметром (учитывающим сотни различных источников неидеальностей, но не в этом суть

<sup>1\*)</sup> Знал ли Чарльз Старк Дрейпер или его команда разработчиков в США о существовании эффекта (2.15) и его проявлении (рис. 3.1), автору не известно. Но достоверно известно, что “такой эффект ранее никем не был замечен” из уст “отцов инерциальной навигации и инерциального наведения” (“лидеров отечественной гироскопии” [46]), как их называли в СССР и называют в России, академика В.И. Кузнецова (по ходу двухчасового разговора 1 октября 1986 года, состоявшегося по инициативе Главного конструктора НПО “Ротор” В.И. Кузнецова в связи с тем, что по программе “Миджитмен”, параллельно с модернизацией блока AIRS разработки Чарльза Старка Дрейпера, освоенного фирмой Northrop и уже использовавшегося в МБР MX, фирмы Litton и Honeywell разрабатывали навигационные блоки на ЛГ, причем по рекламным прогнозам точность блоков на ЛГ превосходила точность блока AIRS в 10 раз [47, 28]) и академика А.Ю. Ишлинского (в серии встреч, состоявшихся по инициативе А.Ю. Ишлинского, с ноября 1993 года по май 1994 года [48, 49]).

В 1991 году, после снятия грифа секретности с тематики ЛГ, несколько первых общетеоретических результатов автора по построению строгой теории БИНС на ЛГ, полученных в 1979-1981-х годах, были оформлены в виде докладов на первые международные симпозиумы по инерциальной технике в Санкт-Петербурге [14, 15]. Для “выпуска в свет” этих результатов (строгие динамические и кинематические уравнения ошибок БИНС и исследованные на их основе закономерности накопления погрешностей и шумов ЛГ в БИСО и БИНС) автору пришлось обсуждать тексты [14, 15] со знатоками гироскопической и инерциальной техники команды В.И. Кузнецова (И.Н. Сапожников, В.И. Решетников, И.Д. Блюмин, М.Л. Еффа, С.А. Харламов). Научная новизна и практическая ценность результатов была подтверждена всеми знатоками, “добро” на публикацию докладов [14, 15] было получено. Но больше других работами [14, 15] заинтересовался М.Л. Еффа [50]. Он со студенческих лет работал с В.И. Кузнецовым, со временем стал ведущим разработчиком всех механических гироскопов разработки НИИ ПМ НПО “Ротор”. В то время М.Л. Еффа помогал поставить на производство ЛГ для разрабатывавшейся в НИИ ПМ БИНС на ЛГ – БИНС-90, поэтому стремился разобраться, что же такое ЛГ [47]. Главным образом, именно для М.Л. Еффы, чтобы оперативно ввести его в курс дела по ЛГ и особенностям БИНС на ЛГ, и были написаны тексты [14, 15]. Параллельно М.Л. Еффа модернизировал сферическую плавающую платформу разработки НИИ ПМ [51], аналогично модернизации блока AIRS Чарльзом Старком Дрейпером. Поэтому эффект первого порядка (2.48) наверняка заинтересовал М.Л. Еффу. Он хотел понять: 1) в чем различие накопления производной белого шума “в угловой скорости” (белого шума “в угле”) в БИНС и в ИНС; 2) в чем причина этого различия, поскольку в ГСП такого “сильного” эффекта никогда не наблюдалось. Автору пришлось все объяснять, начиная с различия строгих КУ ошибок БИНС и платформенных ИНС (2.18), (2.19). М.Л. Еффа все понял и задумался: а что получится, если на поплавковых гироскопах, отработанных для применения в ГСП, построить БИНС. Зная, как разработчик, величины составляющих погрешностей своих гироскопов, М.Л. Еффа сделал численные оценки и подвел черту под обсуждением эффекта (рис. 3.1) своей широко известной в кругах гироскопистов СССР и России краткой и ёмкой крылатой фразой: “Ни чего себе!” (Не путать с выражением: “Ничего себе”).

дела): “уход гироскопа” –  $X_m$  угл. мин/мин или  $X_s$  угл. с/с. И этого, действительно, для гироскопов, предназначенных ГСП, было достаточно (с точностью до эффектов второго порядка).

Но для гироскопов, предназначенных для БИСО и БИНС, все иначе. “Интегрального” параметра “уход гироскопа” принципиально недостаточно. Необходимо знать структуру погрешностей и шумов гироскопов, поскольку различные составляющие, во-первых, по-разному накапливаются в погрешности БИСО, во-вторых, существенно зависят от вида вращения объекта (2.20), (3.2)-(3.4).

На рис. 3.3, 3.4 представлены  $\sigma(\tau)$ -графики девиации Аллана двух модельных гироскопов (№ 1 и 2) с *a priori* известными (заданными) параметрами трех шумов. Различие только в величине нестабильности нуля:  $10^{-4}$  град/ч (рис. 3.3) и  $10^{-5}$  град/ч (рис. 3.4).

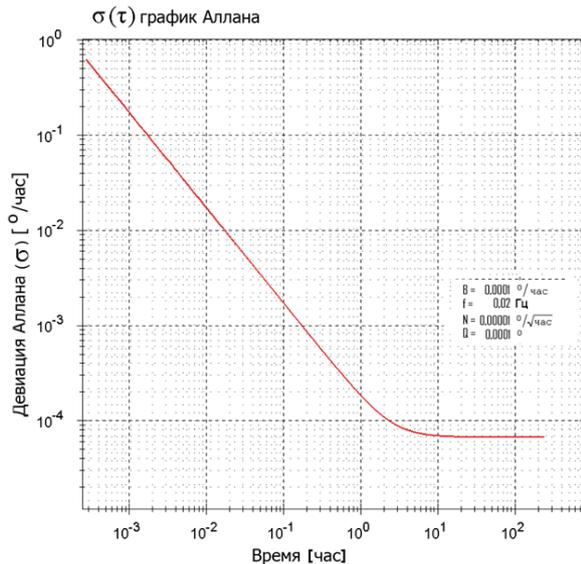


Рис. 3.3.  $\sigma(\tau)$  - график девиации Аллана модельного гироскопа № 1

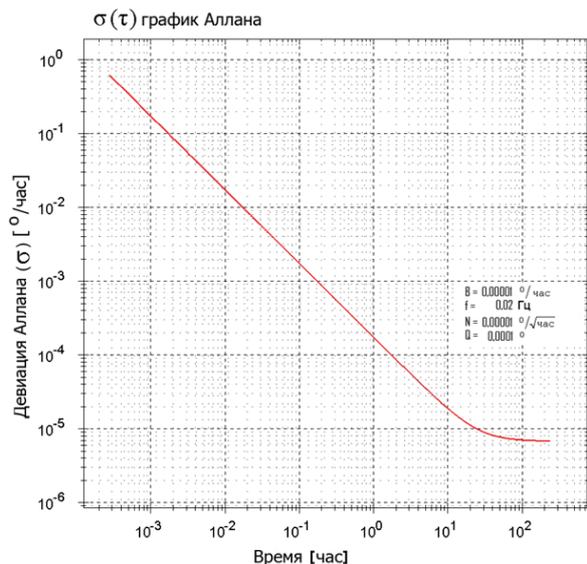


Рис. 3.4.  $\sigma(\tau)$  - график девиации Аллана модельного гироскопа № 2

В о п р о с: какой гироскоп лучше? Если гироскопы предназначены для платформенной ИНС, то, очевидно, второй гироскоп (рис. 3.4) лучше. Белый шум “в угле” дает вклад в “уход” ГСП только во втором порядке, им можно пренебречь (с относительной погрешностью  $\sim 1,8 \times 10^{-6}$ ) по сравнению с другими двумя шумами. “Уход” ГСП будет почти на порядок меньше, независимо от вида вращения объекта. А в случае применения этих гироскопов в БИСО или в БИНС ответ неоднозначный, – все зависит от конкретного вида вращения объекта  $V(t)$ .

Для простоты пояснения предположим, что в результате тех или иных усилий (“гироскоп – это просто” [52]), новое поколение разработчиков-гироскопистов создало гироскопы (на любых физических принципах), в которых полностью отсутствует нестабильность нуля (рис. 3.5) – шум гироскопа представляет собой смесь только двух белых шумов: “в угловой скорости” и “в угле”. Для простоты модели – шумы гауссовы, независимы и имеют равные интенсивности в трех гироскопах:

$$\delta\bar{\omega}(t) = \bar{\xi}_1(t) + \dot{\bar{\xi}}_2(t); \quad \langle \bar{\xi}_1(t) \rangle = \bar{0}; \quad \langle \dot{\bar{\xi}}_2(t) \rangle = \bar{0} \Rightarrow \langle \delta\bar{\omega}(t_1) \delta\bar{\omega}^T(t_2) \rangle = [D\delta(t_1 - t_2) + Q\tau_0^2 \frac{d^2}{dt_1 dt_2} \delta(t_1 - t_2)]I_0. \quad (3.5)$$

“Какой хороший гироскоп!” (рис. 3.5) – восклицает новое поколение разработчиков-гироскопистов.

Да, неплохой (можно, в принципе, сделать и лучше [22]) гироскоп (рис. 3.5), но для применения в платформенной ИНС. Действительно, “уход” ГСП на таких гироскопах будет диффузионным (за 1 ч ошибка ориентации составит  $\sqrt{3} \cdot 10^{-5}$  град ( $1\sigma$ ), за 100 ч –  $\sqrt{3} \cdot 10^{-4}$  град ( $1\sigma$ ), независимо от вида вращения объекта). Ч. Дрейперу тоже бы понравился такой гироскоп (за 1 ч – точность соответствует точности блока AIRS, а за 100 ч – в разы лучше)

$$\sigma_{\Delta s'+}^2(t) \cong 3Dt. \quad (3.6)$$

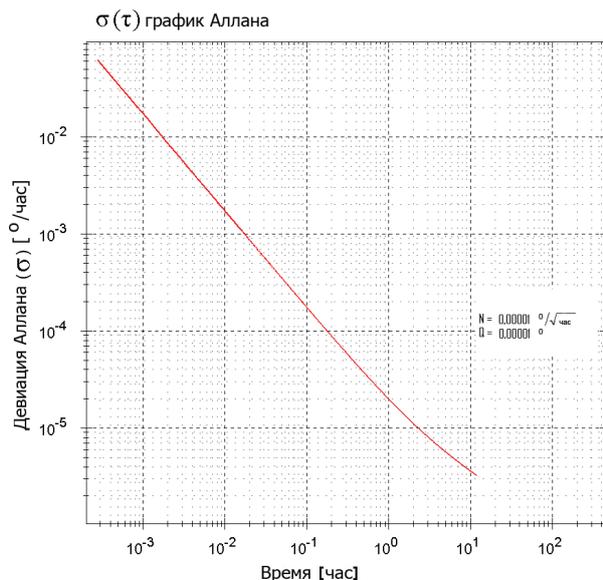


Рис. 3.5.  $\sigma(\tau)$ -график девиации Аллана модельного гироскопа № 3

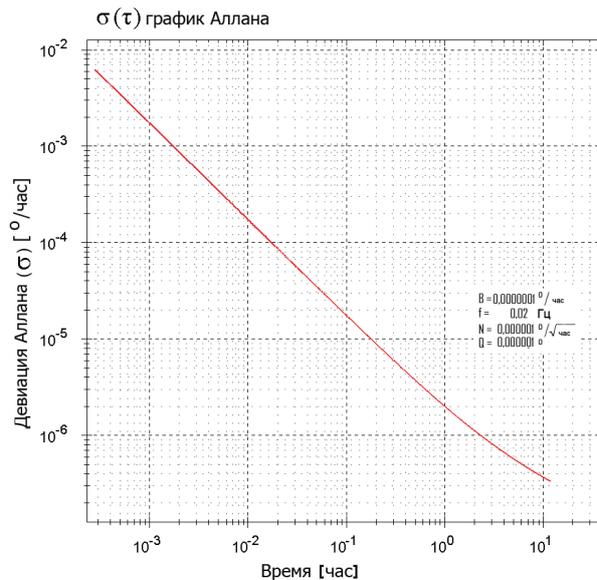


Рис. 3.6.  $\sigma(\tau)$ -график девиации Аллана модельного гироскопа № 4

А в случае применения таких гироскопов в БИСО или в БИНС все будет принципиально иначе

$$\sigma_{\Delta s+}^2(t) \cong 3Dt + 2Q\tau_0^2 \int_0^t |\bar{\omega}(\tau)|^2 d\tau. \quad (3.7)$$

Отношение дисперсий ошибок ориентации БИНС (3.7) и ИНС (3.6) для произвольного вращения объекта ( $B(t) \neq I_0$ ) больше единицы и имеет вид

$$\frac{\sigma_{\Delta s+}^2(t)}{\sigma_{\Delta s'+}^2(t)} = 1 + \frac{2Q\tau_0^2}{3Dt} \int_0^t |\bar{\omega}(\tau)|^2 d\tau. \quad (3.8)$$

Численные величины отношения  $\sigma_{\Delta s+}(t)/\sigma_{\Delta s'+}(t)$  (3.8) легко сможет оценить каждый разработчик-гироскопист для своих гироскопов, если он действительно разработчик [53]. Для ЛГ [47, 54, 55] такие оценки были получены. Были получены оценки и для некоторых других гироскопов. Автор не удивится, если часть разработчиков гироскопов для БИСО и БИНС, четверть века спустя, повторит восклицание М.Л. Еффы: “Ни чего себе!” Возможно, некоторые из разработчиков поймут, что по поводу уменьшения на порядок нестабильности нуля гироскопа (рис. 3.3, 3.4), без уменьшения других шумов, поэт В.В. Маяковский давно заметил: “В грамм – добыча, в годы – труды”.

Автор стремился достичь иного результата, также сформулированного В.В. Маяковским: “Мальчик радостный пошел, и решила кроха: “Буду делать хорошо и не буду – плохо”. (См. образец на рис. 3.6).

#### 4. Задача идентификации структуры шумов гироскопов и стратегия “Бензин – ваш, идеи – наши”

С методами исследований шумов, в т.ч. с вариацией Аллана [56], автор знаком со студенческих лет (1973-1979) учебы в Московском физико-техническом институте (МФТИ) [57, 58] одновременно по трем специальностям: первая – “физическая и квантовая электроника”; вторая – “системы управления МБР” [59, 60]; третья – “статистическая радиофизика”. Практика с третьего курса проходила в соответствии с “Системой Физтеха” на базовой кафедре физической электроники МФТИ [61] (1975-1979) в НИИ прикладной физики (НИИ ПФ), в котором с начала 1960-х разрабатывались ЛГ [62]. И дипломная работа была связана с шумами, но не ЛГ, а оптических квантовых усилителей [63].

В 1960-1970 гг. в СССР для исследований шумов ЛГ, созданных в США (1962) и в СССР (1963) с интервалом полгода [64], использовались радиотехнические и радиофизические методы, а также методы статистической физики и математической статистики. Задачи исследования шумов ЛГ были следующие. По результатам испытаний ЛГ: 1) отделить технические флуктуации, которые можно устранить или уменьшить конструкторско-технологическими решениями при отработке ЛГ, от “естественных” – принципиально неустранимых квантовых шумов, обусловленных спонтанным излучением; 2) точно оценить интенсивность квантовых шумов, определяющих предельно достижимую точность ЛГ; 3) выяснить, являются ли квантовые шумы ЛГ белыми или спектральная плотность мощности шума естественных

флуктуаций на нулевой частоте равна нулю (были две такие модели). От этого зависила точность лазерного гироскопа при заданном времени измерения  $\Delta T$ :  $\sim \Delta T^{-1/2}$  или  $\sim \Delta T^{-1}$ .<sup>2\*)</sup>

Вариация Аллана [56] имеет вид:

$$\sigma_{\omega}^2(\tau) \equiv \frac{1}{2} \langle (\omega_{k+m} - \omega_k)^2 \rangle = \frac{1}{2\tau^2} \langle (\theta_{k+2m} - 2\theta_{k+m} + \theta_k)^2 \rangle \equiv \frac{1}{2\tau^2(N-2m)} \sum_{k=1}^{N-2m} (\theta_{k+2m} - 2\theta_{k+m} + \theta_k)^2; \quad (4.1)$$

$$\omega_k(\tau) \equiv \frac{\theta(t_k + \tau) - \theta(t_k)}{\tau}; \quad \theta(t_k) \equiv \theta_k; \quad \theta(t) \equiv \int_0^t \omega(z) dz; \quad t_k \equiv k\tau_0; \quad \tau = m\tau_0.$$

Со второй половины 1960-х метод вариации Аллана использовался в США не только для исследования структуры шумов стандартов частоты (“времени”), но и фирмами, обрабатывавшими в 1960-1980-х ЛГ и БИНС на ЛГ (Honeywell, Litton, Singer, Sperry, Raytheon и др.). В СССР метод вариации Аллана в те годы в гироскопии, в т.ч. квантовой, широко не использовался. Но последние 10-20 лет при обработке ММГ, ВОГ метод вариации Аллана используется в России с каждым годом все шире. Автор использует  $\sigma(\tau)$ -графики Аллана с 2007 года.

После перерыва, связанного с “перестройкой”, НИИ прикладной механики имени академика В.И. Кузнецова (НИИ ПМ) возобновил работы по ВОГ (в 1985-1995 годах ВОГ исследовались параллельно с разработками ЛГ). Стандартом [66] уже была регламентирована модель ошибок ВОГ с определением параметров шумов. Наконец, было реализовано то, что автор добивался на конференциях с начала 1980-х от разработчиков БИНС и гироскопов, предназначенных для БИНС на примере ЛГ [68], понимая, что разные шумы вносят разный вклад в ошибки ориентации БИНС. В стандартах [66, 67] уже требуется “динамическая” модель ошибок [68] гироскопов для БИНС [16, 17]. В конце 2006 года, выполняя поручение главного конструктора проанализировать состояние разработок ВОГ, автор переговорил с разработчиками ВОГ Москвы, задавая три вопроса:

1. Сколько экземпляров ВОГ стоит на ресурсных испытаниях?
2. Какая точность ВОГ и при каких временах усреднения?
3. Какая цена ВОГ и почему?

Вопрос: “Какая структура шумов ваших ВОГ?” вызывал ответный вопрос: “А какая может быть структура у шума? Шум – белый!”. – Так отвечали автору многие разработчики ВОГ на рубеже 2006-2007 годов, кроме ЗАО “Физоптика” [69], которые в 1960-1980-х годах тоже прошли школу квантовой гироскопии НИИ ПФ, где впервые в СССР были созданы образцы и ЛГ (1963) [64], и ВОГ (1975) [70]. “Ответ – неверный!” – отвечал автор. “А давайте посмотрим!” – предлагал автор. Сказано, – сделано.

На рис. 4.1 представлены автокорреляционные функции шумов трех разных российских ВОГ (не важно, чьей разработки), построенные по результатам испытаний, проводившихся в НИИ ПМ в 2007-

<sup>2\*)</sup> При обработке ЛГ проводились измерения длительностью 10000-100000 часов без выключения приборов. Автору, в то время студенту, приходилось обрабатывать полставки лаборанта на испытаниях ЛГ в нерабочий дни. Смысл дежурства состоял в том, чтобы заменять в самописцах (компьютеров тогда не было) рулоны ленты без нарушения непрерывности измерений. Нельзя же было просто смотреть на самописцы и ни о чем больше не думать. Одним из методов исследования шумов ЛГ в то время был  $\sigma(\Delta T)$ -график – среднеквадратическое отклонение (СКО) как функция времени усреднения (или времени интегрирования угловой скорости, т.к. ЛГ – интегрирующий гироскоп). Очевидны два варианта формирования статистического ансамбля из первичных данных одной реализации для построения  $\sigma(\Delta T)$ -графиков в предположении эргодичности [65] случайного процесса. Первый вариант: цикл измерений с количеством тактов  $N = T/\tau$  ( $\tau$  – такт съема информации,  $T$  – длительность измерения) составляет первичный ансамбль, по которому вычисляется СКО  $\sigma(\tau)$ . Далее данные двух соседних тактов суммируются (первого со вторым, третьего с четвертым и т.д.) и вычисляется СКО  $\sigma(2\tau)$ . И т.д. для получения СКО  $\sigma(n\tau)$ , т.е.  $\sigma(\Delta T)$ -графика ( $\Delta T = n\tau$ ) первого типа. С увеличением  $n$  размер ансамбля, очевидно, уменьшается  $\sim N/n$ , уменьшается и достоверность оценки  $\sigma(n\tau)$ . Для повышения достоверности  $\sigma(n\tau)$  можно увеличить размер ансамбля. Почему бы и нет? если гипотеза эргодичности уже принята. Второй вариант: Для  $\sigma(2\tau)$  используется не только  $[N/2]$  элементов первичного ансамбля (символ [...] – функция целой части), но и еще дополнительно  $[(N-1)/2]$  элемент (если  $N$  – нечетное число) или  $[(N-2)/2]$  элемента (если  $N$  – четное число), получаемых суммированием первичных данных: второго с третьим, третьего с четвертым и т.д. Аналогично для вычисления  $\sigma(n\tau)$ , сдвигая на  $n$  тактов “вправо” суммирование данных  $n$  соседних тактов. Иными словами, для подготовки статистического ансамбля в целях вычисления СКО  $\sigma(n\tau)$  используются все возможные варианты сумм первичных данных непрерывно следующих друг за другом  $n$  тактов съема информации. Дисперсия для построения  $\sigma(\Delta T)$ -графика второго типа имеет вид:

$$\sigma_{\omega}^2(\Delta T) \equiv \langle (\omega_{k+m} - \omega_k)^2 \rangle - \langle (\omega_{k+m}) \rangle^2; \quad \omega_k(\Delta T) \equiv \frac{\theta(t_k + \Delta T) - \theta(t_k)}{\Delta T}; \quad \theta(t_k) \equiv \theta_k; \quad \theta(t) \equiv \int_0^t \omega(z) dz; \quad t_k \equiv k\tau; \quad \Delta T = m\tau, \quad (*)$$

где  $\omega$  – угловая скорость,  $\theta$  – угол кажущегося поворота,  $\tau$  – длительность такта съема информации.

Функционал (\*) близок по структуре к вариации Аллана [56] (есть три отличия), несмотря на то, что возник из других рассуждений.

2008 годах [71, 21]. В стандартах IEEE Std 952-1997 и IEEE Std 952-1997 (R2008) таких шумов (рис. 4.1) не было [66] и нет [67].<sup>3\*)</sup>

Постановка задачи по разработке программно-математического комплекса (ПМК) для идентификации структуры шумов была более лаконичной по сравнению с постановкой задачи в [48]:

“Ребята! Работаем дальше. Разрабатываем ПМК со следующими возможностями: ПМК должен:

1) “уметь делать” всё (ключевое слово – “всё”), что ранее было известно для решения задач идентификации структуры шумов в физике и в технике;

2) позволять расширять возможности для реализации любых новых идей.

Всё остальное – на ваш вкус. С любыми вопросами обращайтесь в любое время и спрашивайте о деталях”.

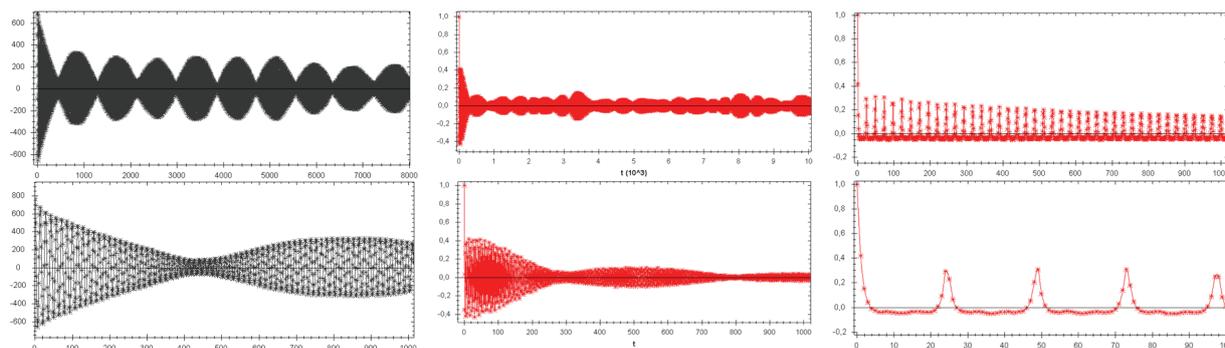


Рис. 4.1. Автокорреляционная функция и коэффициенты корреляции шумов трех образцов ВОГ, построенные по результатам испытаний ВОГ российской разработки (масштаб не играет роли)

## 5. Топология графиков девиации Аллана. Парциальные вклады разных шумов в $\sigma(\tau)$ -графики

Основные обозначения и определения:  $S_\omega(f)$  - спектральная плотность мощности шума;  $K_\omega(\tau)$  - автокорреляционная функция;  $\sigma(\tau)$  - девиация Аллана.

Связь вариации Аллана и спектральной плотности мощности шума (в угловой скорости) [67]:

$$\sigma^2(\tau) = 4 \int_0^\infty S_\omega(f) \frac{\sin^4(\pi f \tau)}{(\pi f \tau)^2} df. \quad (5.1)$$

$N$  – коэффициент случайного дрейфа угла (the angle random walk (ARW) coefficient) [67]:

$$S_\omega(f) = N^2 \rightarrow \sigma^2(\tau) = \frac{N^2}{\tau}. \quad (5.2)$$

$B$  – коэффициент нестабильности нуля (the bias instability (B) coefficient) [67]:

$$S_\omega(f) = \begin{cases} \frac{B^2}{2\pi} \frac{1}{f} & f \leq f_0 \\ 0 & f > f_0 \end{cases} \rightarrow \sigma^2(\tau) = \frac{2B^2}{\pi} \left[ \ln 2 - \frac{\sin^3 x}{2x^2} (\sin x + 4x \cos x) + Ci(2x) - Ci(4x) \right]; \quad Ci(x) \equiv - \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt, \quad (5.3)$$

$f_0$  – частота отсечки (the cutoff frequency),  $Ci$  – интегральный косинус (the cosine-integral function),  $x = \pi f \tau$ .

<sup>3\*)</sup> При разворачивании работ по ВОГ в НИИ ПМ в 2007-2008 гг., общаясь с молодыми специалистами, автор с удивлением понял, что новое поколение разработчиков гироскопов не понимает элементарные вещи: как по результатам испытаний определить структуру шумов гироскопов и зачем это нужно?; как по типу шумов определить их источник в элементах и подсистемах гироскопа с целью устранения этого источника или его ослабления для повышения точности гироскопа?; как различные шумы гироскопов накапливаются во времени в ошибках БИСО и БИНС?; какие составляющие шумов более критичны в конкретных применениях в части влияния на точность систем ориентации, навигации и управления, для которых конкретный гироскоп предназначен?; в чем различие белых шумов “в угле”, “в угловой скорости” и “в угловом ускорении” в части влияния этих шумов гироскопов на точность систем, для которых эти гироскопы предназначены?; как взаимосвязаны числа  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$  в выражениях точности:  $X_1$  угл. с/с,  $X_2$  угл. мин/мин,  $X_3$  град/ч,  $X_4$  град/сутки,  $X_5$  град/месяц,  $X_6$  град/год; можно ли определить числа  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$  если известно одно седьмое число  $X_7$  – СКО ошибки определения угловой скорости за время измерения 100 с? После услышанного в ответ и увиденного (рис. 4.1) стало ясно – все предстоит начинать практически “с нуля”, – этому сегодня просто не учат ни в одном из тех институтов, выпускники которых приходят в НИИ ПМ. В инициативном порядке были созданы три неформальные группы. В первую (Y) привлекались все желающие разобраться с шумами; во вторую (Z) вошли аспиранты, в третью (X) – студенты, которых автор в качестве наставника готовил к исследовательской работе. Работа со всеми группами была реализована по стратегии “Бензин – ваш, идеи – наши” [72]. Сегодня в НИИ ПМ каждый разработчик знает: 1) шумы у гироскопов не белые, а представляют собой смесь разных шумов; 2) как по  $\sigma(\tau)$ -графику Аллана понять: какие шумы в смеси; 3) оценить сверху величину нестабильности нуля и случайного дрейфа. Группа X знает и умеет существенно больше.

$K$  – коэффициент случайного дрейфа угловой скорости (rate random walk (RRW) coefficient) [67]:

$$S_{\omega}(f) = \left(\frac{K^2}{2\pi}\right) \frac{1}{f^2} \rightarrow \sigma^2(\tau) = \frac{K^2\tau}{3}. \quad (5.4)$$

$R$  – коэффициент уклона угловой скорости (the rate ramp (RR) coefficient) [67]:

$$S_{\omega}(f) = \frac{R^2}{(2\pi f)^3} \rightarrow \sigma^2(\tau) = \frac{R^2\tau^2}{2}. \quad (5.5)$$

$Q$  – коэффициент шума квантования (the quantization noise (Q) coefficient) [67]:

$$S_{\omega}(f)(f) = \begin{cases} \frac{4Q^2}{\tau_0} \sin^2(\pi f \tau_0) \\ \approx (2\pi f)^2 \tau_0 Q^2 \end{cases} \quad f < \frac{1}{2\tau_0} \rightarrow \sigma^2(\tau) = \frac{3Q^2}{\tau^2}. \quad (5.6)$$

Экспоненциально коррелированный марковский шум (exponentially correlated Markov noise (M)) [67]:

$$S_{\omega}(f) = \frac{(q_c T_c)^2}{1 + (2\pi f T_c)^2} \rightarrow \sigma^2(\tau) = \frac{(q_c T_c)^2}{\tau} \left[ 1 - \frac{T_c}{2\tau} \left( 3 - 4e^{-\frac{\tau}{T_c}} + e^{-\frac{2\tau}{T_c}} \right) \right], \quad (5.7)$$

$q_c$  – амплитуда марковского шума;  $T_c$  – время корреляции марковского шума.

Гармоническая помеха (“синусоидальный шум”) [67]

$$S_{\omega}(f) = \frac{1}{2} \Omega_0^2 [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] \rightarrow \sigma^2(\tau) = \Omega_0^2 \left( \frac{\sin^2(\pi f_0 \tau)}{\pi f_0 \tau} \right)^2. \quad (5.8)$$

На рис. 5.1 представлены  $\sigma(\tau)$ -графики девиации Аллана шумов, предусмотренных стандартом [67], смоделированные с помощью ПМК (разработчик программы этой подсистемы ПМК – А.И. Биденко).

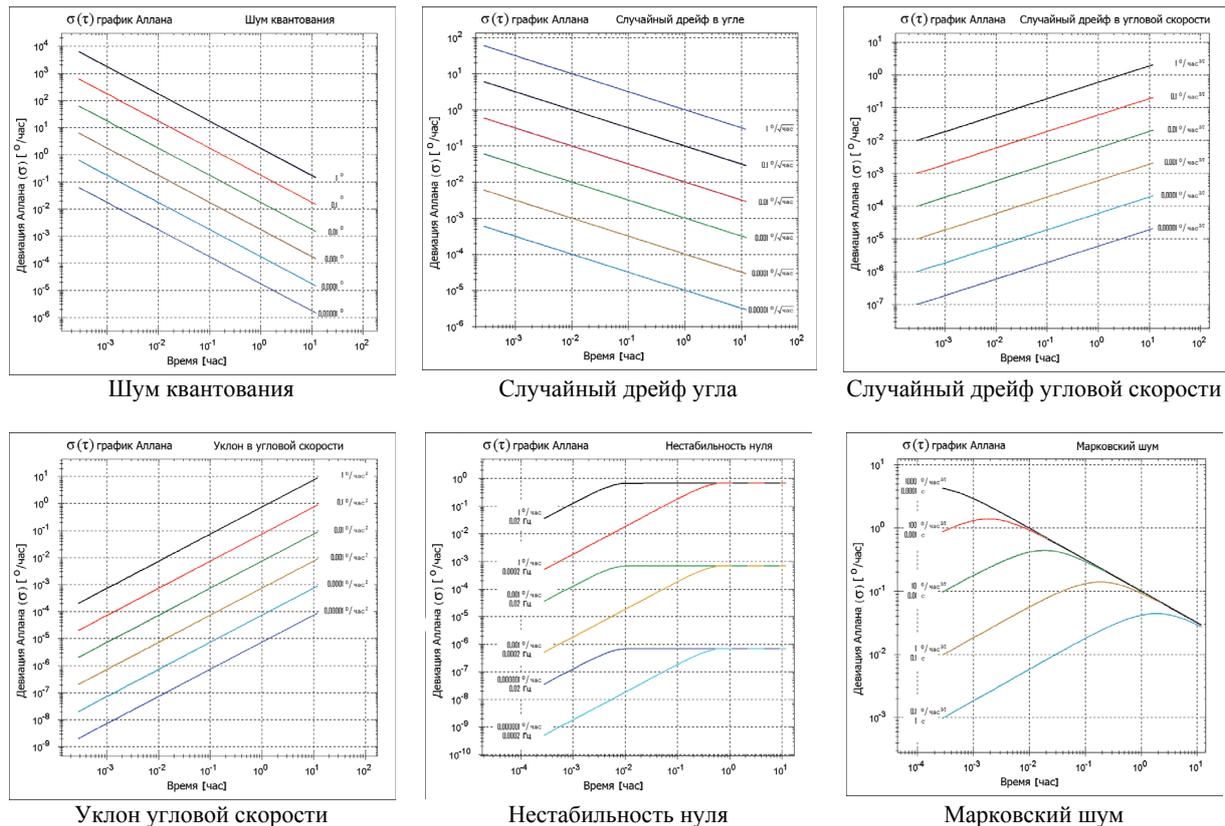


Рис. 5.1. Топология  $\sigma(\tau)$ -графиков девиации Аллана “базисных” шумов, предусмотренных стандартом [67]

Топология (*analysis situs* [73])  $\sigma(\tau)$ -графиков девиации Аллана шумов, представленных на рис. 5.1, достаточно проста и наглядна: Четыре шума: 1) шум квантования (the quantization noise), 2) случайный дрейф угла (the angle random walk (ARW)), 3) случайный дрейф угловой скорости (rate random walk (RRW)) и 4) уклон угловой скорости (the rate ramp (RR)) – однопараметрические. Изменение соответст-

вующих параметров приводит к параллельному сдвигу  $\sigma(\tau)$ -графиков девиации Аллана “по вертикали” (рис. 5.1). Два шума: 5) Нестабильность нуля (the bias instability (B)) и 6) Экспоненциально коррелированный (Марковский) шум (exponentially correlated (Markov) noise (M)) – двухпараметрические. Изменение параметров этих шумов приводит к двухпараметрической “деформации”  $\sigma(\tau)$ -графиков девиации Аллана (рис. 5.1). Для n-параметрических шумов топология  $\sigma(\tau)$ -графиков зависит от n параметров, в частности от 3 параметров для трехпараметрических шумов.

Для смеси статистически независимых шумов результирующий  $\sigma_{\Sigma}(\tau)$ -график девиации Аллана смеси шумов зависит от парциальных девиаций шумов  $\sigma_i(\tau)$  нелинейным образом:

$$\sum_i \zeta_i(t) \Rightarrow \sigma_{\Sigma}(\tau) = (\sum_i \sigma_i^2(\tau))^{1/2}. \quad (5.9)$$

На рис. 5.2 представлены  $\sigma(\tau)$ -графики девиации Аллана гармонических помех (“синусоидальных шумов”), предусмотренных стандартом [67], смоделированные с помощью ПМК.

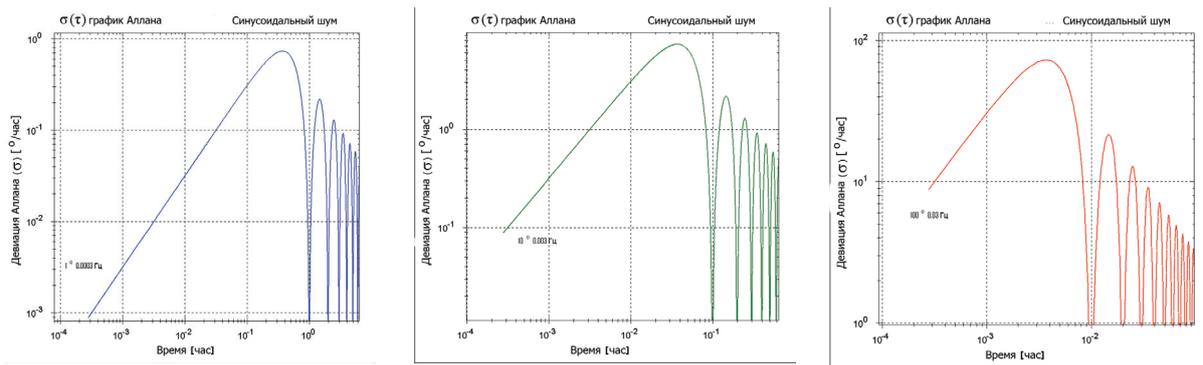


Рис. 5.2. Топология  $\sigma(\tau)$ -графиков девиации Аллана гармонических помех (“синусоидальных шумов”), предусмотренных стандартом [67]

Здесь уместно пояснить следующее. Несмотря на используемый символ дисперсии  $\sigma^2$ , вариация Аллана  $\sigma^2(\tau)$  [56] дисперсией не является. Вариация Аллана – это статистический момент второго порядка, – средний по ансамблю квадрат величины, зависящий от параметра  $\tau$  определенным образом (4.1). Поэтому в вариацию Аллана и в  $\sigma(\tau)$ -графики девиации Аллана вносят вклад не только случайные процессы (шумы), но и любые детерминированные (неслучайные) процессы (кроме постоянных).

Почему автор для оценки влияния шумов гироскопов на точность ориентации БИНС использует функционал  $\sigma_{\Delta S+}^2(t)$  (2.33) вместо дисперсии  $\sigma_{\Delta S}^2(t)$  (2.32) объяснено в п. 2 – это следствие вращения в трехмерном пространстве. А почему Д. Аллан в одномерном случае, где таких проблем нет, использует не дисперсию, а только среднее значение квадрата (второй момент) скалярной случайной величины без “минус квадрата среднего”, – вопросы к Д. Аллану. Но один аспект очевиден. Метод вариации Аллана разрабатывался для исследований флюктуаций частоты и фазы стандартов частоты (“времени”). Для стандартов “времени” важна величина “ухода” фазы за тот или иной интервал времени, независимо от того, обусловлен этот уход стационарными или нестационарными случайными процессами или же изменяющимися во времени детерминированными процессами.

В гироскопии ситуация близкая, но несколько иная, поскольку важны не только такие погрешности и шумы в угловой скорости (аналог частоты), которые приводят к погрешности угла кажущегося поворота (аналог “ухода” фазы), но и такие шумы в угловой скорости, которые, хотя и не приводят к росту во времени погрешности угла кажущегося поворота, но приводят к росту во времени погрешности угла действительного поворота – следствие некоммутативности вращений вокруг точки (а не вокруг оси). В платформенных ИНС – это эффекты второго порядка, в БИНС – эффекты первого порядка.

Для идентификации структуры шумов гироскопов нужен более детальный инструментарий, чем для идентификации структуры шумов частоты и фазы в стандартах “времени”, а именно для идентификации шумов гироскопов типа (2.43), (2.45). Для учета флюктуаций бортовых шкал времени на точность БИНС (и ИНС) нужна информация о структуре шумов не только “времени” (фазы) и первой производной (частоты), но и второй производной (первой производной частоты стандартов времени) [74].

На рис. 5.3 представлены сформированные программой Alavar 5.2 графики девиации Аллана, модифицированной девиации Аллана и девиации Адамара по первичной информации лабораторных испытаний 4-осного ВОГ, но не по данным в столбцах с информацией четырех каналов ВОГ, а по числам в столбце № 1 с номерами последовательности отсчетов: 1, 2, 3 и т.д. Иными словами для функции  $t$ . Для

графика девиации Аллана – это луч прямой с наклоном +1, для девиации Адамара – тождественная единица, как и должно быть. Функциям  $t^2$  и  $t^3$  соответствуют графики девиации Аллана также в виде лучей с наклоном +1, но со сдвигом начала луча.

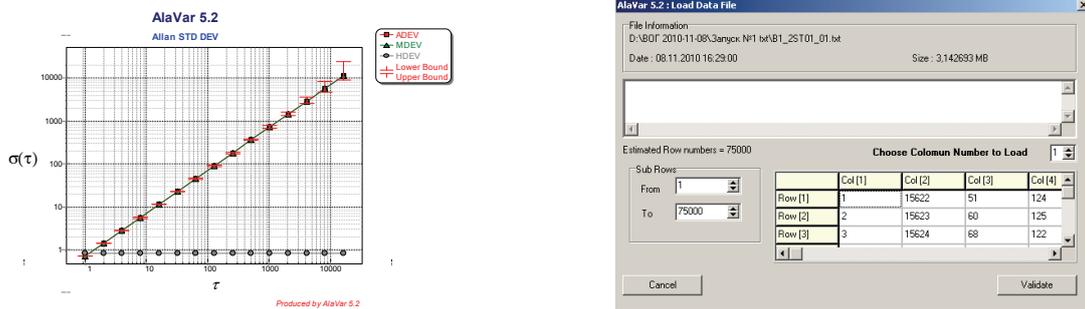


Рис. 5.3. Графики девиации Аллана, модифицированной девиации Алана и девиации Адамара, сформированные программой Alavar 5.2 по первым 75000 числам натурального ряда чисел: 1,2,3,...

Естественно, автор объяснил это свойство вариации Аллана – отражать вклад не только шумов, но и любых детерминированных функций времени (кроме констант) – группе  $Y$  и предложил при разработке компьютерных программ предусмотреть построение графиков, соответствующих не только вариациям (Аллана, Адамара и для методов  $n$ -х разностей [75]), но и соответствующих дисперсиям. “Графики для дисперсий могут отличаться от графиков для вариаций”, – сообразила группа  $Y$ . “Могут. И не только могут, но иногда и будут”, – уточнил автор. “Но тогда графики по дисперсиям, нужно как-то отличать от графиков по вариациям”, – сообразила группа  $Y$ . “Это точно” – согласился автор. “Тогда их и называть нужно иначе” – сообразила группа  $Y$ . “Называйте, как хотите. Суть дела – не в названии”. С тех пор расширения вариаций до дисперсий разработчики НИИ ПМ называют: “дисперсия Аллана-Кробки”:

$$\sigma_A^2(\tau) \equiv \frac{1}{2} \langle (\omega_{k+m} - \omega_k)^2 \rangle \rightarrow \sigma_{A-K}^2(\tau) \equiv \frac{1}{2} \langle (\omega_{k+m} - \omega_k)^2 \rangle - \frac{1}{2} \langle (\omega_{k+m} - \omega_k) \rangle^2, \quad (5.10)$$

“дисперсия Адамара-Кробки”:  $\sigma_H^2(\tau) \rightarrow \sigma_{H-K}^2(\tau)$ . Как называют дисперсии для методов  $n$ -х порядков [75] автор не слышал. Такими названиями автор не пользуется, поскольку суть дела – не в названии.

Но если Дэвид Аллан не возражает, то и Николай Кробка не будет возражать, если эти обобщения так будут называть в будущем и за пределами НИИ ПМ. Но при одном условии, состоящем в том, что использование дисперсий одновременно с вариациями принесет пользу для идентификации шумов.

Физическая интуиция подсказывает, что использование одновременно двух функционалов типа (5.10) может в некоторых случаях повысить возможности идентификации структуры шумов.<sup>4\*)</sup>

## 6. Типовые заблуждения и грубые ошибки в интерпретации структуры и в оценках параметров шумов гироскопов на основе $\sigma(\tau)$ -графиков девиации Аллана

Первый пример (“два в одном”). Из множества известных опубликованных работ, в которых некорректно оценены структура и параметры шумов гироскопов на основе  $\sigma(\tau)$ -графиков девиации Аллана, выберем, в качестве яркого примера, доклад 2007 года [79]. Выбор именно этого доклада сделан, во-первых, потому, что в нем содержится половина “букета” распространенных заблуждений и грубых ошибок в интерпретации графиков девиации Аллана, сформулированных во введении. Во-вторых, это один из немногих докладов на Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам, написанный российскими авторами сначала на английском языке, а потом

<sup>4\*)</sup> Два примера из практики автора увеличения в два раза объема исходной информации.

1) Если вектор угловой скорости в общем случае произвольного вращения объекта задан проекциями только во вращающемся базисе или только в неподвижном базисе, то КУ (2.2), никому не удалось проинтегрировать в квадратурах более 250 лет – с момента создания кинематики вращений Леонардом Эйлером. А если использовать одновременно два представления, то парные КУ интегрируются в квадратурах [76], причем без единой операции интегрирования [77]. Одновременную информацию можно получить, используя гироскопы БИНС и платформенной ИНС, стабилизированной в инерциальном пространстве [78].

2) Новый алгоритм инерциальной навигации [19, 22], состоящий в следующем: в штатном алгоритме вычисления по показаниям акселерометров и гироскопов траектории объекта полностью не учитывается гравитационное ускорение, но одновременно интегрируются строгие уравнения ошибок и используется точная связь решения “штатного” алгоритма и решения строгих уравнений ошибок. Неучтенный в “штатном” алгоритме вклад гравитационного ускорения точно учитывается в решении строгих уравнений ошибок. При этом и “штатный” алгоритм, и строгие уравнения ошибок являются линейными и интегрируются в квадратурах. В результате действительная траектория объекта выражается в квадратурах без необходимости интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений [19, 22].

переведенный на русский язык. Поэтому любой, не умеющий читать на русском языке, сможет оценить логику оценки параметров шумов гироскопа, читая грамотный английский текст [79] (кроме досадной опечатки в названии доклада: “Coliolis” вместо “Coriolis”). В-третьих, так как один из соавторов, написавший текст [79], имеет три высших технических образования: Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, с отличием, 1998; Университет Иллинойса, Урбана-Шампейн, США, степень Магистра наук (M.Sc.), 2001; Университет Калгари, Канада, степень доктора наук (PhD), 2005 [80], можно с минимальной долей иронии, поскольку это не самые худшие университеты в России, США и Канаде, сделать вывод: “Методу вариации Аллана для идентификации структуры шумов гироскопов грамотно не учат ни в России, ни в США, ни в Канаде”.

Итак. Следуя “железной логике” классического анекдота [81] (с точностью до изоморфизма [82, 83]): “Если коробка квадратная, значит в ней что-то круглое. Если круглое, значит оранжевое. Если оранжевое, значит апельсин!”, совершается действие в трех актах [79]. Акт первый: смотрим на  $\sigma(\tau)$ -график Аллана (рис. 6.1). Акт второй: сравниваем график (рис. 6.1) с графиком на рис. 6.2. Акт третий: определяем, (что может быть проще?), величину  $N$  – коэффициента случайного дрейфа угла и величину  $B$  – коэффициента нестабильности нуля, сравнивая графики на рис. 6.1 и рис. 6.2.

Конкретные рассуждения [79] представлены цитатой на рис. 6.3.

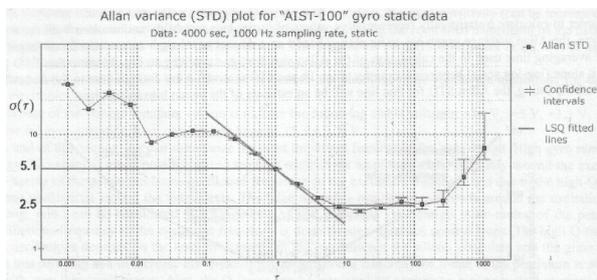


Рис. 6.1.  $\sigma(\tau)$ -график Аллана, построенный по данным испытаний вибрационного ММГ “AIST-100” [79]

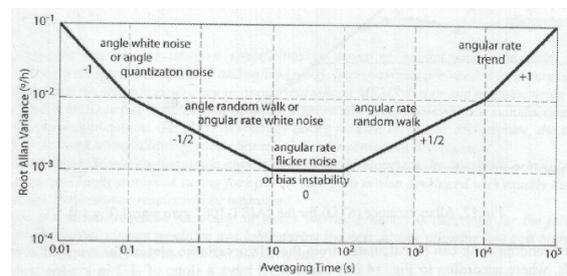


Рис. 6.2. Схематическое представление результирующей девиации Аллана [79, 84], введшее в заблуждение многих

Случайному дрейфу соответствует наклон  $-1/2$  (см. рис. 6.2). Находим на графике (рис. 6.1) наклон  $-1/2$ . Логично? См. еще раз рис. 6.1 и 6.2. – Логично! Отыскиваем на отрезке с наклоном  $-1/2$  точку, перпендикуляр из которой к горизонтальной оси пройдет через точку  $\tau=1$  с. (В этом авторам доклада [79] просто повезло. Есть такая точка на Рис. 6.1). Далее см. рис. 6.3.

An estimate of random walk can be calculated from the Allan variance plot on the range of averaging times from 0.1 to 10 seconds, where according to Fig. 14 this curve must have a slope of  $-1/2$  in log-log scale. After fitting an LSQ line on this range with slope  $-1/2$ , a random walk estimate (ARW) can be computed as following:

$$ARW = \sigma_a(\tau) \sqrt{\tau}, \quad (6)$$

where,  $\sigma_a$  – Allan STD (deg/hour) at averaging time  $\tau$  (hour) for any point on this line between 0.1 and 10 seconds.

As can be seen from Fig.17, the ARW value for the “AIST-100” gyro can be found as:

$$ARW = 5.1 \sqrt{\frac{1}{3600}} = 0.085 \text{ deg}/\sqrt{\text{hour}}. \quad (7)$$

In-run bias instability for the gyro between averaging times 10 and 100 seconds is equal to 2.5 deg/hour, which can be considered as a very good value for a low-cost and miniature gyro that can be produced in large volume.

Рис. 6.3. Цитата из доклада [79] в части анализа параметров шумов на основании графика Аллана (см. рис. 6.1)

В чем заблуждения и ошибки? Это очевидно до тривиальности. Во-первых, из графика (рис. 6.1) нельзя сделать вывод не только о величине случайного дрейфа, но даже о его наличии в смеси шумов. Максимум, что можно сделать, – принять гипотезу (правдоподобную с учетом опыта), что белый шум в угловой скорости существует и оценить сверху его величину (см. рис. 5.1). Проведенный на рис. 6.1 отрезок прямой с наклоном  $-1/2$  можно ассоциировать с вкладом марковского процесса в  $\sigma(\tau)$ -график Аллана, а не случайного дрейфа угла, т.к. его парциальный вклад представляет собой луч (а не отрезок) с наклоном  $-1/2$ , проходящий через крайнюю левую точку  $\sigma(\tau)$ -графика Аллана (см. рис. 5.1). Для получения верхней оценки величины  $N$  необходимо через крайнюю левую точку  $\sigma(\tau)$ -графика девиации Аллана провести луч с наклоном  $-1/2$  (см. рис. 6.1). Если такой луч пересекает  $\sigma(\tau)$ -график, луч нужно сместить ниже (параллельным переносом) до касания с  $\sigma(\tau)$ -графиком в одной точке. По построенному таким образом лучу можно определить (по известному алгоритму [66]) верхнюю оценку величины  $N$ . Даже визуально (“на глаз”) из рис. 6.1 видно, что верхняя оценка величины  $N$  меньше величины  $0,085 \text{ град}/(\text{ч})^{1/2}$  [79] (рис. 6.3) примерно в (10-20) раз. Кроме того, в силу эффекта “суммирования” (4.8) действительная

величина  $N$  меньше верхней оценки, как минимум, в разы. Визуально из рис. 6.1 (с учетом опыта) величина  $N$  оценивается в диапазоне  $(0,006-0,001)$  град/(ч)<sup>1/2</sup>.

Значение  $B$  коэффициента нестабильности нуля на основе графика (рис. 6.1) с учетом графика (рис. 6.2) определена в [79] по расположению касательной к минимальному значению  $\sigma(\tau)$ -график Аллана (рис. 1). Во-первых, уж если следовать “логике” рис. 6.2, необходимо было бы учесть коэффициент  $1/0,664$  [66] (см. рис. 6.4). Но при наличии смеси шумов касательная к минимальному значению  $\sigma(\tau)$ -графика Аллана, как правило, дает завышенную оценку. На рис. 6.5 и 6.6 приведены примеры двух смесей шумов, когда действительная величина коэффициента  $B$  меньше его оценки по касательной к локальному минимуму  $\sigma(\tau)$ -графика Аллана соответственно в 4 раза и в 20 раз.

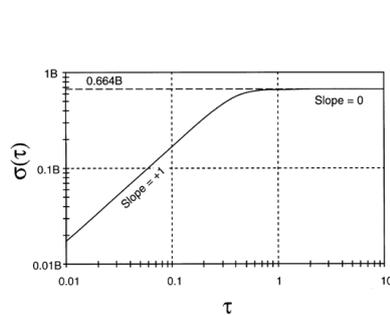


Рис. 6.4. Вклад нестабильности нуля в  $\sigma(\tau)$ -график девиации Аллана [67]

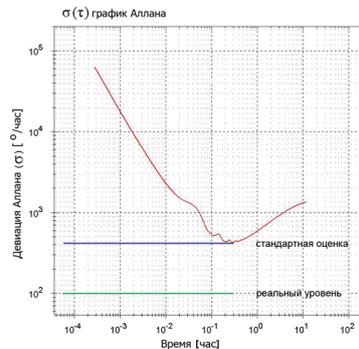


Рис. 6.5. Различие в 4 раза значения  $B$  по сравнению с оценкой

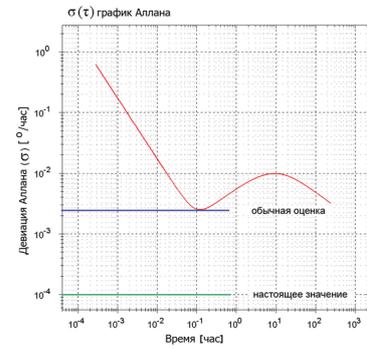


Рис. 6.6. Различие в 20 раз значения  $B$  по сравнению с оценкой

Авторы доклада [79] искренне заблуждались в части интерпретации графика девиации Аллана (рис. 6.1), так как ошиблись в оценках точностных характеристиках своего гироскопа “не в свою пользу”. Из рисунка очевидно, что точностные характеристики ММГ “AIST-100” [79] существенно лучше: величина  $N$  — не  $0,085$  град/(ч)<sup>1/2</sup>, а не более  $(0,006-0,001)$  град/(ч)<sup>1/2</sup>; величина  $B$  — не  $2,5$  град/ч, а не более  $1$  град/ч. Эти улучшенные оценки можно еще улучшить, анализируя первичные данные.

Эту подсказку автор делает О.А. Мезенцеву — соавтору доклада [79] в знак благодарности за то, что именно он в 2007 г. подсказал автору о существовании в сети Internet программы Alavar 5.2.

**В т о р о й п р и м е р** — доклад 2012 г. [85]. То, что ВОГ ведущих разработчиков имеют долговременную стабильность нуля  $\sim 0,0001$  град/ч, не вызывает сомнений. Из представленного на рис. 6.7 графика девиации Аллана для ВОГ iXblue FOG (Astrix 200) следуют оценки: стабильность нуля  $\sim 4 \times 10^{-5}$  град/ч, случайный дрейф  $\sim 2 \times 10^{-4}$  град/(ч)<sup>1/2</sup>. Только за ЛГ “обидно”, т.к. в докладе [85] в качестве сравнения ВОГ и ЛГ указан уровень точности современных ЛГ  $(0,01-0,003)$  град/ч. По-видимому, автор доклада [85] не заметил, что уровень точности ЛГ: нестабильность нуля — менее  $0,0001$  град/ч; случайный дрейф — менее  $0,00001$  град/(ч)<sup>1/2</sup>, нестабильность масштабного коэффициента — менее  $0,01$  ppm был достигнут в ЛГ на разных схемах DILAG в США несколько раньше года издания книги [86], а в КНР — несколько позже. Но суть не в этом. В тексте доклада [85] нет графиков девиации Аллана. Но в презентации доклада [85] были продемонстрированы графики девиации Аллана, которыми удобно воспользоваться для объяснения еще одного типового заблуждения в интерпретации структуры и оценки параметров шумов — не учета эффекта “экранирования” белого шума в угловой скорости марковскими процессами с малым временем корреляции. Из графиков рис. 6.8 видно, что в левых частях  $\sigma(\tau)$ -графиков Аллана есть “завал” — типичный для ВОГ “горбик” (или несколько, как на рис. 6.8).

Что это? Очевидно, это парциальные вклады марковских процессов с малыми временами корреляции.

Поясним детально с помощью рис. 6.9 и 6.10. На рис. 6.9 представлен  $\sigma(\tau)$ -график девиации Аллана шумов ВОГ разработки ООО НПК «Оптолинк» типа ОИУС 1000 ([ $\tau$ ] — количество тактов съема информации; частота съема информации  $100$  Гц, [ $\sigma(\tau)$ ] — град/ч). Верхняя оценка величины случайного дрейфа из графика:  $\sim 4 \times 10^{-4}$  град/(ч)<sup>1/2</sup>. А какая действительно величина случайного дрейфа? Можно ли снизить величину верхней оценки? Можно (см. рис. 6.10). Но для этого нужно знать параметры марковского процесса — амплитуду и время корреляции. Можно поступить проще — изменить аппаратно время корреляции марковского процесса, чтобы сместить “горбик” на  $\sigma(\tau)$ -графике вправо.

Сказано — сделано. Впервые такой целевой эксперимент был проведен ООО НПК «Оптолинк».

На рис. 6.11 и 6.12 результат —  $\sigma(\tau)$ -графики девиации Аллана по результатам испытаний одного и того же ВОГ ОИУС 1000 (№ 12020) с частотой съема информации  $2000$  Гц. Единственное изменение, которое вносилось для “чистоты эксперимента”, — только параметры марковского процесса при прочих равных условиях. Первичные данные обработаны одной и той же программой Alavar 5.2.

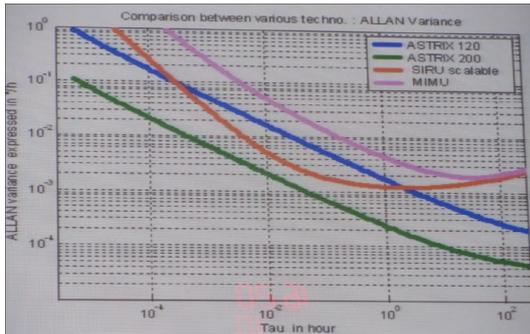


Рис. 6.7. Фото презентации доклада [85]

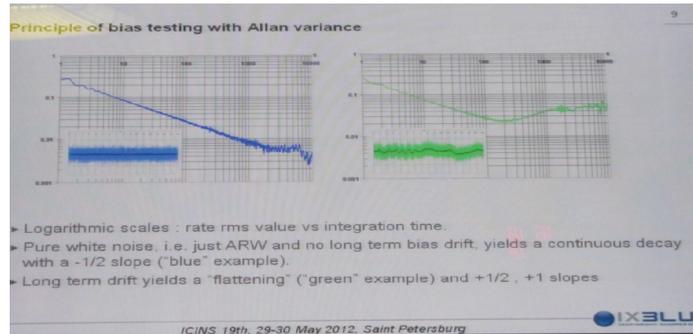


Рис. 6.8. Фото презентации доклада [85]

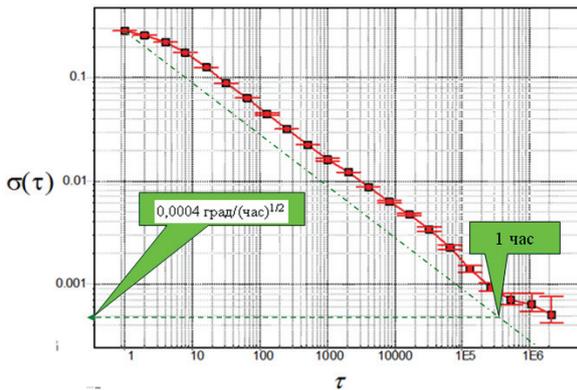


Рис. 6.9.  $\sigma(\tau)$ -график девиации Аллана шумов ВОГ ОИУС 1000

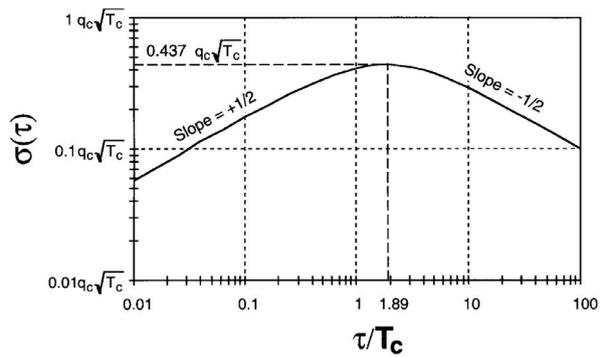


Рис. 6.10. Парциальный вклад марковского шума в  $\sigma(\tau)$ -график девиации Аллана [67]

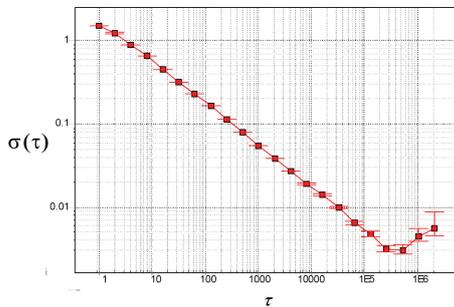


Рис. 6.11.  $\sigma(\tau)$ -график девиации Аллана шумов ВОГ (вариант № 1 параметров марковского процесса)

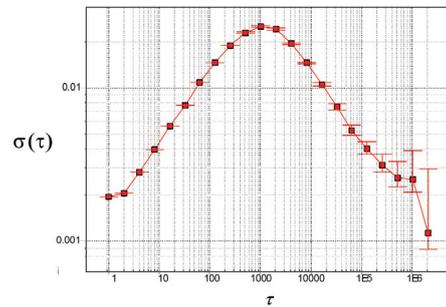


Рис. 6.12.  $\sigma(\tau)$ -график девиации Аллана шумов ВОГ (вариант № 2 параметров марковского процесса)

Из графиков рис. 6.11 и 6.12 очевидно: верхняя оценка величины белых шумов ВОГ снижена на три порядка. Действительно, из  $\sigma(\tau)$ -графика (рис. 6.11) следует верхняя оценка

$$\text{менее } \frac{1}{(3600 \cdot 2000)^{1/2}} = \frac{1}{600(20)^{1/2}} = \frac{(5)^{1/2}}{6} \cdot 10^{-3} \text{ [град/(ч)}^{1/2}\text{]}.$$

Из  $\sigma(\tau)$ -графика (рис. 6.12) следует верхняя оценка

$$\text{менее } \frac{0,002}{(3600 \cdot 2000)^{1/2}} = \frac{0,002}{600(20)^{1/2}} = \frac{2 \cdot (5)^{1/2}}{6} \cdot 10^{-6} = \frac{(5)^{1/2}}{3} \cdot 10^{-6} < 10^{-6} \text{ [град/(ч)}^{1/2}\text{]}.$$

Итак. Уровень белых шумов ВОГ российской разработки менее  $10^{-6}$  град/(ч)<sup>1/2</sup> и не уступает лучшим образцам ВОГ ведущих разработчиков [87, 88]. Более точные оценки (еще уменьшающие оценку действительной величины) белых шумов ВОГ будут опубликованы в ближайшее время разработчиком – ООО НПК Оптолинк. Визуально (по графикам на рис. 6.10 и 6.12):  $\sim (10^{-7}-10^{-8})$  град/(ч)<sup>1/2</sup>.

Это подсказка профессору Лефевру (Н.С. Lefevre) в связи с докладом [85] и всем разработчикам ВОГ.

Автор одинаково хорошо относится к ЛГ, ВОГ и новым квантовым гироскопам [89]. Почему? <sup>5\*)</sup>

Т р е т ь и й ( и п о с л е д н и й ) п р и м е р – во многих работах реальные шумы различных чувствительных элементов пытаются разложить “по базису” пяти известных шумов, которые вносят парциальный вклад в  $\sigma(\tau)$ -график девиации Аллана с наклонами -1, -1/2, 0, +1/2, +1 (рис. 6.2). Что можно сказать? Очевидно, что существующие в смеси иные шумы (кроме этих пяти) “размазывают” в качестве неопределенности оценки параметров пяти “базисных” шумов. Что поделать, – под фонарем, действительно, светлее.

Но можно действовать иначе – систематически изучать шумы, находить новые типы и вносить их в “базис” шумов для моделей ошибок соответствующих чувствительных элементов.

## 7. Вариации Аллана и $\sigma(\tau)$ -графики Аллана для новых, ранее не учитываемых типов шумов

Вариацию Аллана (4.1) можно вычислить для произвольного временного ряда, но на основании (5.1) аналитические выражения можно вычислить только для таких типов шумов, заданных спектральной плотностью мощности шума, для которых интеграл (5.1) сходится.

В табл. 7.1 представлены вариации Аллана для трех бесконечных (счетных) множеств новых (неучтенных в стандартах IEEE на гироскопы) шумов со спектральными плотностями мощности шума, равными нулю на нулевой частоте. Наличие символа мнимой единицы  $i$  ( $i^2 = -1$ ) в двух из трех формул для вещественных функций не должно вводить в заблуждение. См. подсказку от Леонарда Эйлера:

$$e^{i\pi} = -1.$$

Т а б л и ц а 7.1

$S_{\omega}(f)$	$\sigma^2(\tau)$
$\alpha f^n e^{-\beta f}$	$\frac{\alpha \Gamma(n-1)}{4\pi^2 \tau^2} [6\beta^{1-n} - 4(\beta - 2i\pi\tau)^{1-n} - 4(\beta + 2i\pi\tau)^{1-n} + (\beta - 4i\pi\tau)^{1-n} + (\beta + 4i\pi\tau)^{1-n}];$
	$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ — Euler gamma function; $n > 1$
$\alpha f^n e^{-\beta f^2}$	$\frac{\alpha}{4\pi^2 \tau^2} \beta^{1/2-n/2} \Gamma\left(\frac{1}{2}(n-1)\right) \left[ 3 + F_1\left(\frac{1}{2}(n-1), \frac{1}{2}, -\frac{4\pi^2 \tau^2}{\beta}\right) - 4F_1\left(\frac{1}{2}(n-1), \frac{1}{2}, -\frac{\pi^2 \tau^2}{\beta}\right) \right];$
	$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ — Euler gamma function; $F_1(a, b, c) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(b)_k} \frac{z^k}{k!}$ — hypergeometric function
	of the first kind; $(a)_n \equiv \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)} = x(x+1) \cdot \dots \cdot (x+n-1)$ — Pochhammer symbol; $n > 1$
$\alpha f^n e^{-\beta f} \cos(cf)$	$\frac{4\alpha}{\pi^2 \tau^2} \frac{\Gamma(1+n)}{32} \{ 6(b-ic)^{-1-n} + 6(b+ic)^{-1-n} + [b-i(c-4\pi\tau)]^{-1-n} + [b+i(c-4\pi\tau)]^{-1-n} - 4[b-i(c-2\pi\tau)]^{-1-n} - 4[b+i(c-2\pi\tau)]^{-1-n} - 4[b-i(c+2\pi\tau)]^{-1-n} - 4[b+i(c+2\pi\tau)]^{-1-n} + [b-i(c+4\pi\tau)]^{-1-n} + [b+i(c+4\pi\tau)]^{-1-n} \}$

<sup>5\*)</sup> Во-первых, в октябре 1975 г. на экскурсии в НИИ ПФ, предшествовавшей распределению студентов III курса (группа 355 ФФКЭ МФТИ) по лабораториям “базы”, автор впервые своими глазами одновременно увидел и разнообразные варианты ЛГ, некоторые из которых уже несколько лет были освоены в серийном производстве и приняты в эксплуатацию на различных объектах (раньше чем в США), и различные макетные образцы ВОГ, которые разрабатывались уже несколько лет. Автор тогда даже давал советы (а как же, – уже третьекурсник Физтеха, уже что-то понимающий в физике) разработчикам ВОГ НИИ ПФ: “Используйте солитонный режим в ВОГ. Дисперсия солитонов в волокне минимальна. Получите лучшую стабильность нуля”. Автор прекрасно знает, что до публикаций о ВОГ было еще полгода [90]. А первый опубликованный результат [90] был тривиален: интерференционная картинка от лазерного излучения, пропущенного через 10 метровый кусок световода. Поэтому на молодежных конференциях, на которые (после доклада [89]) приглашают, автор не устаёт говорить: “Ребята! Получили результат, – публикуйте. Не откладывайте “в долгий ящик”. У меня на глазах СССР потерял мировой приоритет в создании ВОГ. И не надо брать пример с меня. Я публикую результаты и 10, и 20, и 30 [91] и даже 40 лет спустя [48]”. Вот и сегодня – 35 лет спустя.

Во-вторых, в августе 1979 года автору, уже молодому инженеру, пришлось работать на одном столе в лаборатории № 69 НИИ ПФ с Николаем Главатских – тоже молодым инженером, выпускником физического факультета МГУ. На одной половине стола автор пытался проинтегрировать строгие КУ ошибок БИНС (2.19) в квадратурах [7], чтобы одной формулой учесть вклад произвольных шумов (любого гироскопа) в ошибку ориентации БИНС и чтобы не учитывать соизмеримые вклады разных шумов в первом и произвольном  $n$ -м порядке теории возмущений (2.22). На второй половине стола Николай Главатских собирал макет ВОГ по какой-то новой оптико-физической схеме. Никакой технологической осязности у него не было. Вот автору ему и посоветовал: “Николай! Неужели вас на физическом факультете не учили, как решать проблемы [7]? А ты не мучайся, – сделай все из одного куска волокна”. Цельноволоконная технология ВОГ действительно состоялась. Такие варианты реализовали и физтехи-одноклассники в НИИ ПФ (ныне в составе ЗОА Физоптика), и Honeywell в США.

В-третьих, многие результаты теории БИНС на ЛГ [11] автоматически переносятся на теорию БИНС на ВОГ и других гироскопах.

В табл. 7.2 представлены вариации Аллана и асимптотики девиации Аллана для некоторых частных случаев шумов, представленных в табл. 7.1. В табл. 7.3 представлены вариации Аллана и асимптотики девиации Аллана для некоторых иных типов шумов.

Таблица 7.2

$S_{\omega}(f)$	$\sigma^2(\tau)$	$\sigma(\tau), \tau \rightarrow 0$	$\sigma(\tau), \tau \rightarrow \infty$
$\alpha f e^{-\beta f}, \beta > 0$	$-\frac{\alpha}{4\pi^2\tau^2} [\ln(\beta^2 + 16\pi^2\tau^2) - 4\ln(\beta^2 + 4\pi^2\tau^2) + 6\ln\beta]$	$\frac{2\sqrt{6\alpha\pi}}{\beta^2} \tau$	$\sqrt{\frac{3\alpha}{2\pi^2\tau^2} \ln\left(\frac{4^{1/3}\pi\tau}{\beta}\right)}$
$\alpha f^2 e^{-\beta f}, \beta > 0$	$\frac{96\alpha^2\pi^2\tau^2}{\beta(\beta^2 + 4\pi^2\tau^2)(\beta^2 + 16\pi^2\tau^2)}$	$4\pi\sqrt{\frac{6\alpha}{\beta^5}} \tau$	$\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{3\alpha}{2\beta}} \tau^{-1}$
$\alpha f^3 e^{-\beta f}, \beta > 0$	$\frac{96\alpha\pi^2\tau^2(5\beta^4 + 60\beta^2\pi^2\tau^2 + 60\pi^4\tau^4)}{\beta^2(\beta^2 + 4\pi^2\tau^2)^2(\beta^2 + 16\pi^2\tau^2)^2}$	$4\pi\sqrt{\frac{30\alpha}{\beta^6}} \tau$	$\frac{1}{\pi\beta}\sqrt{\frac{3\alpha}{2}} \tau^{-1}$
$\alpha f^2 e^{-\beta f^2}$	$\frac{-4\pi^2\tau^2}{\alpha(3 + e^{\frac{\pi^2\tau^2}{\beta}} - 4e^{\frac{\pi^2\tau^2}{\beta}})}$	$\sqrt{\frac{3\alpha\pi^{5/2}}{2\beta^{5/2}}} \tau$	$\sqrt{\frac{3\alpha}{4\beta^{1/2}\pi^{3/2}}} \tau^{-1}$
$\alpha f^3 e^{-\beta f^2}$	$\frac{\alpha}{\beta^{3/2}\pi\tau} \left( 2D\left(\frac{\pi\tau}{b^{1/2}}\right) - D\left(\frac{2\pi\tau}{b^{1/2}}\right) \right), D(x) \text{ — Dawson function}$	$\sim \tau$	$\sim \tau^{-1}$

Таблица 7.3

$S_{\omega}(f)$	$\sigma^2(\tau)$	$\sigma(\tau), \tau \rightarrow 0$	$\sigma(\tau), \tau \rightarrow \infty$
$\frac{\alpha f^2}{\beta^2 + f^2}, \beta > 0$	$\frac{\alpha}{4\beta\pi\tau^2} (3 - 4e^{-2\beta\pi\tau} + e^{-4\beta\pi\tau})$	$\sqrt{\alpha\tau^{-1/2}}$	$\left(\frac{3\alpha}{4\beta\pi}\right)^{1/2} \tau^{-1}$

Графики девиации Аллана для нескольких новых типов шумов представлены на рис. 7.1.

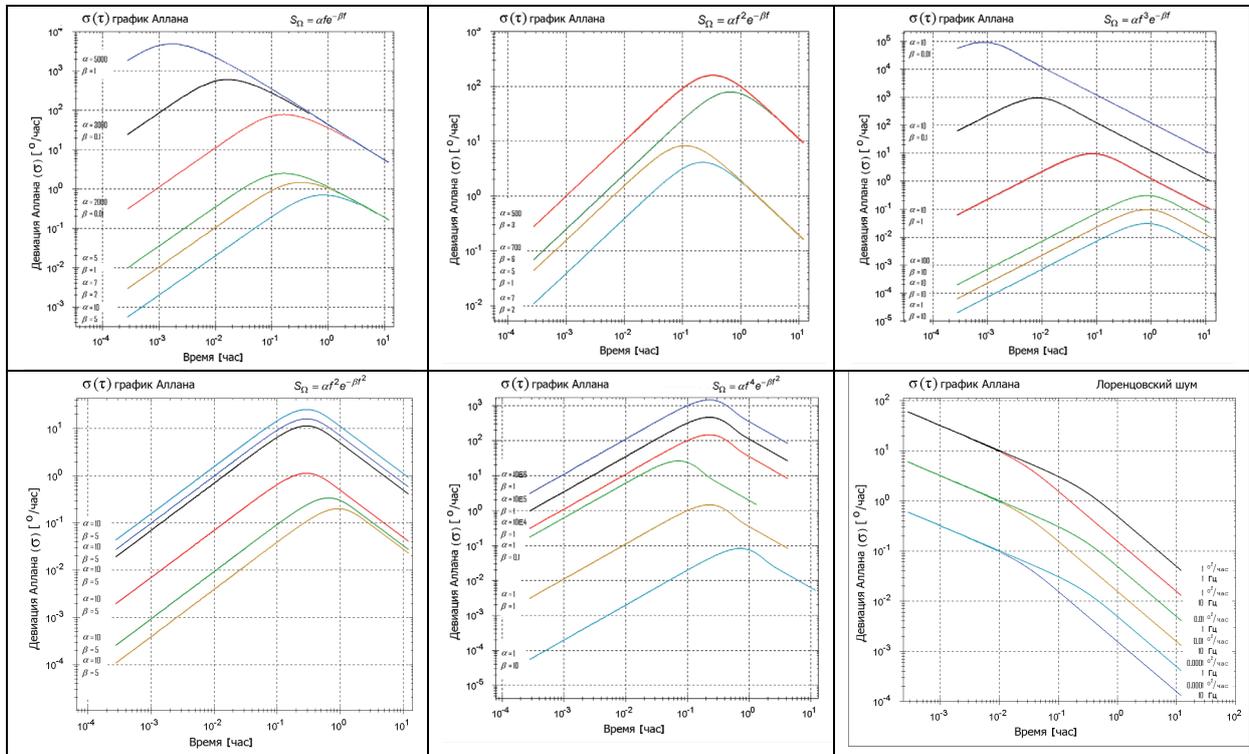


Рис. 7.1. Графики девиации Аллана для нескольких новых типов шумов

## Заключение

В первой части доклада строго и наглядно продемонстрировано:

- кинематические уравнения ошибок платформенных ИНС и БИНС принципиально различаются;
- широкий класс шумов гироскопов, которые вносят вклад в “уход” ГСП только во втором порядке (поэтому – “малый”), приводит к ошибке ориентации БИНС в первом порядке (поэтому – “большой”);
- один и тот же конкретный шум гироскопов приводит к разным по величине ошибкам ориентации БИНС в зависимости от вида вращения объекта (кроме белых шумов в угловой скорости);
- при одном и том же вращении объекта разные шумы вносят разный вклад в ошибку ориентации БИНС;
- минимально необходимая информация о шумах тройки гироскопов – корреляционная матрица шумов, при принятии гипотезы о гауссовой статистике шумов;
- для гироскопов, предназначенных для применения в БИНС, необходима существенно более “тонкая” идентификация структуры шумов гироскопов по сравнению с применением гироскопов в ГСП.

Во второй части доклада три идеи:

1) Вариация Аллана – эффективный метод для идентификации шумов. Несомненное достоинство метода – детально разработанная за полвека “инфраструктура” [92-95] – обоснование метода, техника  $\sigma(\tau)$ -графиков девиаций Аллана, программное обеспечение, стандарты IEEE с использованием метода вариации Аллана.

2) Метод вариации Аллана, как и любой другой метод, нужно осваивать, что дается только практикой. А если использовать метод потому, что это “модно”, не понимая суть, то можно наделать много нелепых ошибок.

3) Следующий шаг в освоении и развитии метода вариации Аллана (и его обобщений [21]), с точки зрения автора, применительно к шумам гироскопов, – систематическое исследование шумов, уточнение моделей ошибок, в т.ч. с учетом новых типов шумов для различных гироскопов.

Представители команды разработчиков активно работающего отца гироскопической и инерциальной навигационной техники (не столько ракетно-космической, сколько морской и океанической) академика В.Г. Пешехонова, возможно, предложат на “круглом столе” иные перспективные пути развития методов для идентификации структуры и оценки параметров шумов инерциальных чувствительных элементов. Большой научно-технический задел этой команды имеется в области нелинейной фильтрации [96-99].

*Автор благодарен своим ближайшим ученикам за оперативную помощь при подготовке доклада на “круглый стол” МКИНС2015.*

*А.И. Биденко за помощь с построением графиков, все просьбы в виде команд передавал программно-математическому комплексу (рис. 3.3-3.6, 5.1, 5.2, 6.5, 6.6, 7.1.).*

*Н.В. Трибулев помог выбрать табличные интегралы [100], для которых интеграл (5.1) сходится, в первую очередь, для случаев (2.43), а также подготовил таблицы (7.1-7.3) и проверил их программой Mathematics, одновременно добавив с помощью этой программы несколько формул для вариации Аллана, которые не следовали из табличных интегралов [100].*

*“Учитель, подготовь учеников, чтобы было, у кого потом учиться!”.*

## Литература

1. **Charles Stark Draper.** URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Charles\\_Stark\\_Draper](https://en.wikipedia.org/wiki/Charles_Stark_Draper).
2. **Charles Stark Draper Laboratory.** URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Charles\\_Stark\\_Draper\\_Laboratory#Inertial\\_navigation](https://en.wikipedia.org/wiki/Charles_Stark_Draper_Laboratory#Inertial_navigation)
3. **Draper at 25.** Innovation for the 21st Century. URL: <http://www.draper.com/Documents/draperat25.pdf>.
4. **Дрейпер.** Приборная техника и инерциальное наведение // Вопросы ракетной техники. – 1961. – № 1. – С. 70-91; № 2. – С. 46-73.
5. **Advanced Inertial Reference Sphere.** URL: [http://en.wikipedia.org/wiki/Advanced\\_Inertial\\_Reference\\_Sphere](http://en.wikipedia.org/wiki/Advanced_Inertial_Reference_Sphere).
6. **Advanced Inertial Reference Sphere.** URL: <http://nuclearweaponarchive.org/Usa/Weapons/Airs.html>.
7. **Кробка, Н.И.** Стратегия решения открытых задач и асимметрия вращения вокруг точки вправо и влево // Концепт. – 2014. – Современные научные исследования. Вып. 2. – ART 55199. URL: <http://e-koncept.ru/2014/55199.htm>.
8. **Javan, A., Bennett, W.R. and Herriott, D.R.** Population Inversion and Continuous Optical Maser Oscillation in a Gas Discharge Containing a He-Ne Mixture // Phys. Rev. Lett. – 1961. – V. 63. – P. 106-110.
9. **Macek, W.M., Davis, D.T.M.** Rotation rate sensing with travelling-wave ring laser // Appl. Phys. Lett. – 1963. – Vol. 2. – No. 3. – P. 67-68.
10. **Бранец, В.Н.** Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела / В.Н. Бранец, И.П. Шмыглевский. – М.: Наука, 1973. – 320 с.
11. **Кробка, Н.И.** Трехосные лазерные гироскопы и теория их применения в бесплатформенных инерциальных системах: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.04.04. – 1985. – 193 с.

12. **Кробка, Н.И.** Некоммутативные кинематические эффекты и их особенности в лазерной гироскопии и бесплатформенной инерциальной навигации / Н.И. Кробка // II Санкт-Петербургская межд. конф. по гироскопической технике и навигации. Ч. I. – С.-Петербург: Научный совет РАН по проблемам управления движением и навигации. ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 1995. – С. 151.
13. **Кробка, Н.И.** Некоммутативные кинематические эффекты вращения твердого тела вокруг точки и их проявления в особенностях построения бесплатформенных систем ориентации на лазерных и волоконно-оптических гироскопах // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – № 4 (2). – С. 181–183.
14. **Кробка, N.I.** Accurate error equations of the strapdown inertial navigation systems // The Second Soviet-Chinese Symposium of Inertial Tecnology / Chief editor V.G. Peshekhonov – SPb.: The Scientific Council on Problems of Motion Control and Navigation of the Academy of Sciences. Chinese Society of Inertial Technology. CSRI “Electropribor”, 1992. – P. 43-50.
15. **Кробка, N.I.** Application features of three-axis laser gyros in strapdown inertial navigation systems / The IV Russian-Chinese Symposium on Inertial Technology. – SPb.: St. Petersburg Section of the Scientific Council on Movement Control and Navigation Problems of the RAS. Chinese Society on Inertial Technology. – 1993. – P. 54-63
16. **Кробка, N.I.** The features of the strapdown inertial orientation systems based on three-axis fiber-optic gyros with one common light source // Jubilee 15th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems. Proceedings. – SPb.: The SRC of the RF Central Scientific and Research Institute “Elektropribor”. – 2008. – Pp. 89-91.
17. **Кробка, N.I.** Non-commutative kinematic effects and laws of fiber-optic gyro noise accumulation in strapdown inertial orientation systems // Proc. of the 16th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems. – SPb.: SRC of the Russian Federation Central Scientific and Research Institute “Elektropribor”, 2009. – P. 69-72.
18. **Кробка, N.I.** A New Noncommutative Kinematic Effect and Its Manifestations in Strapdown Inertial Orientation Systems Based on Fiber Optic Gyros // Gyroscopy and Navigation, 2010, Vol. 1, No. 1, p. 26–36.
19. **Кробка, N.I.** The concept of accurate equations of errors and estimations of quantum limits of accuracy of strapdown inertial navigation systems based on laser gyros, fiber-optical gyros, and atom interferometers on de Broglie waves // 17th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems. Proceedings. – Saint Petersburg: State Research Center of the Russian Federation Concern CSRI Elektropribor, JSC, 2010. – P. 95-112.
20. **Кробка, N.I.** Differential methods for identification the structure of noises of fiber-optical and other gyros // 17th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems. Proceedings. – Saint Petersburg: State Research Center of the Russian Federation Concern CSRI Elektropribor, JSC, 2010. – P. 63-66.
21. **Кробка, N.I.** Differential Methods of Identifying Gyro Noise Structure // Gyroscopy and Navigation, 2011, Vol. 2, No. 3, p. 126-137.
22. **Кробка, N.I.** Estimating Quantum Limits on SINS Accuracy Based on Accurate Error Equations // Gyroscopy and Navigation. – 2014. – Vol. 5. No. 1. – P. 9-19.
23. **Klauder, J.R., Sudarshan, E.C.G.** Fundamentals of Quantum Optics. – New York - Amsterdam: Bell Telephone Laboratories, Syracuse University, 1968.
24. **Ахманов, С.А.** Введение в статистическую радиофизику и оптику / С.А. Ахманов, Ю.Е. Дьяков, А.С. Чиркин. – М.: Наука, 1981. – 640 с.
25. **Свешников, А.А.** Прикладные методы теории случайных функций. – М.: Наука, 1968. – 464 с.
26. **Кробка, Н.И.** О влиянии случайных возмущений угловой скорости на решение кинематической задачи / Н.И. Кробка, М.В. Свиридов // Известия АН СССР. МТТ. – 1984. – № 1. – С. 145-150.
27. **Кробка, Н.И.** Влияние случайной частотной подставки в кольцевом лазере на точность измерения вращения / Н.И. Кробка, М.В. Свиридов // Квантовая электроника. – 1985. – Т. 12. – № 2. – С. 363-367.
28. **Кробка, Н.И.** О поручениях главного конструктора НПО “Ротор” академика АН СССР В.И. Кузнецова, концепции уравнений ошибок и новом алгоритме бесплатформенных инерциальных навигационных систем (100-летию юбилею академика В.И. Кузнецова посвящается) // IX Межд. научно-технич. конф. "Гиротехнологии, навигация, управление движением и конструирование авиационно-космической техники". Сборник докладов. Ч. 1. – Киев: НТУУ “КПИ”, 2013. – С. 195-208.
29. **Gilvarry, J.J., Browne, S.H., Williams, I.K.** Theory of Blind Navigation by Dynamical Measurements // J. of Applied Physics. – 1950. – Vol. 21. – No. 8. – Pp. 753-761.
30. **Андреев, В.Д.** Теории инерциальной навигации. Автономные системы. – М.: Наука, 1966. – 579 с.
31. **Андреев, В.Д.** Теория инерциальной навигации. Корректируемые системы. – М.: Наука, 1967. – 647 с.
32. **Климов, Д.М., Рабинович, Ю.И.** О кинематических ошибках инерциальных систем навигации // Изв. АН СССР. Механика. – 1965. - № 6. – С. 49-52.
33. **Бранец, В.Н.** О точности решения кинематических уравнений. 1. Уравнения ошибок // Космические исследования. – 1982. – Т. 20. – Вып. 2. – С. 145-150.
34. **Бранец, В.Н.** О точности решения кинематических уравнений. 2. Использование квазикоординат // Космические исследования. – 1982. – Т. 20. – Вып. 3. – С. 323-331.
35. **Jekeli, C.** Navigation Error Analysis of Atom Interferometer Inertial Sensor // Navigation. Journal of The Institute of Navigation. – 2005. – V. 52. – No. 1. – P. 1-14.
36. **Голован, А.А.** Математические основы навигационных систем. Ч. I. / А.А. Голован, Н.А. Парусников. – 2-е издание, исправленное и дополненное. – М.: Изд-во МГУ, 2010. – 126 с.
37. **Ишлинский, А.Ю.** Механика специальных гироскопических систем. – Киев: АН УССР, 1952. – 432 с.
38. **Goodman, L.E., Robinson, A.R.** Effect of finite rotations on gyroscopic sensing devices // J. of Appl. Mech. – 1958. – Vol. 25. – No. 2. – P. 210-213.

39. **Девянин, Е.А., Ишлинский, А.Ю., Климов, Д.М.** Механика гироскопических и навигационных систем / Механика в СССР за 50 лет. Т. 1. Общая и прикладная механика. – М.: Наука, 1968. – С. 245-264.
40. **Андреев, В.Д., Блюмин, И.Д., Девянин, Е.А., Климов, Д.М.** Обзор развития теории гироскопических и инерциальных навигационных систем / Развитие механики гироскопических и инерциальных систем. – М.: Наука, 1973. – С. 33-72.
41. **Андреев, В.Д., Девянин, Е.А.** Автономные инерциальные навигационные системы / Развитие механики гироскопических и инерциальных систем. – М.: Наука, 1973. – С. 307-321.
42. **Doc Draper.** URL: <http://www.draperprize.org/docdraper.php>
43. **Krobka, N.I.** Effect of random perturbations of the angular velocity on the solution of the kinematic problem / N.I. Krobka, M.V. Sviridov // Mechanics of solids. – 1984. – V. 19, N. 1. – P. 139-144.
44. **Krobka, N.I.** Influence of a random frequency pedestal in a ring laser on the accuracy of rotation measurements / N.I. Krobka, M.V. Sviridov // Sov. J. Quantum Electron. – 1985. – V. 15. – No. 2. – P. 232-234.
45. **SAO/NASA Astrophysics Data System (ADS).** URL: [http://adsabs.harvard.edu/cgi-bin/nph-abs\\_connect?return\\_req=no\\_params&author=Krobka,%20N.%20I.&db\\_key=PHY](http://adsabs.harvard.edu/cgi-bin/nph-abs_connect?return_req=no_params&author=Krobka,%20N.%20I.&db_key=PHY)
46. **Пешехонов, В.Г.** Лидеры отечественной гироскопии // Гироскопия и навигация. – 2013. – № 3. – С. 139-154.
47. **Кробка, Н.И.** Работы по лазерной гироскопии в НИИ ПМ. Воспоминания Кробки Н.И. – заместителя Главного конструктора НИИ ПМ по направлению лазерной гироскопии // Приоритет – точность. ФГУП «НИИ ПМ имени академика В. И. Кузнецова». 50 лет. / Под общ. ред. И.Н. Сапожникова. – М.: Изд-во РЕСТАРТ, 2006. – С. 161-165.
48. **Krobka, N.I.** On a Misconception in the Theory of Inertial Navigation Passed Unnoticed for Many Decades / N.I. Krobka, A.I. Balandin, A.I. Bidenko, N.V. Tribulev, V.S. Chernichenko // 20<sup>th</sup> Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems. Proceedings. – Spb.: SRC of the RF Concern CSRI Elektropribor, 2013. – P. 80-86.
49. **Krobka, N.I.** Development of a Program-Mathematical Software Package for Identification of a Gyroscope Noise Structure and Simulation of Strapdown Inertial Orientation Systems / N.I. Krobka, A.I. Balandin, A.I. Bidenko, S.V. Keda, N.V. Tribulev, V.S. Chernichenko // 20<sup>th</sup> Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems. Proceedings. – Spb.: SRC of the Russian Federation Concern CSRI Elektropribor, JSC, 2013. – P. 87-92.
50. **Еффа Марк Леопольдович.** URL: <http://pomnipro.ru/memoriyapage56484/biography>
51. **Приоритет – точность.** ФГУП «Научно-исследовательский институт прикладной механики имени академика В. И. Кузнецова». 50 лет. / Под общ. ред. И.Н. Сапожникова. – М.: Изд-во РЕСТАРТ, 2006. – 190 с.
52. **Матвеев, В.А.** Гироскоп – это просто. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. – 195 с.
53. **Еффа, М.Л.** Разработчик – творческий шанс инженера / Реферат задуманной М.Л. Еффой книги, которую он мечтал написать, но не успел: “Я – Разработчик”.
54. **Krobka, N.I.** Works on laser Gyroscopy in Applied Mechanics Scientific Research Institute named after academician V.I. Kuznetsov / N.I. Krobka, I.N. Sapozhnikov / The First International Conference on Inertial Technology. – Spb.: Central Scientific and Research Institute “Elektropribor”, 1994. – P. 3-12.
55. **Кробка, Н.И.** Результаты разработки лазерных гироскопов для бесплатформенных инерциальных навигационных систем / Н.И. Кробка // Гироскопия и навигация. – 1995. – № 3. – С. 82-83.
56. **Allan, D.W.** Statistics of Atomic Frequency Standards // Proc. of the IEEE. – 1966. – Vol. 54, No. 2. – P. 221-230.
57. **Moscow Institute of Physics and Technogy.** State University. URL: <http://mipt.ru/en/>.
58. **Физтех-портал.** МФТИ. Интернет-портал “Легендарный Физтех”. URL: <http://info.mipt.ru/>.
59. **50 лет в строю Физтеха** / Сост.: Ноздрин В.И., Прусаков И.Б., Седов Б.С. – г. Долгопрудный: МФТИ, 2004. – 224 с.
60. **Карлов, Н.В.** Они создавали Физтех. Вып. 2-й (По архивным материалам и воспоминаниям). – М., 2007. – 164 с.
61. **Кафедра физической электроники.** Выпускники кафедры. URL: <http://mipt.ru/education/chairs/fizelectro/alumni/>.
62. **Мазанько, И.П.** К вопросу о предельной ширине спектральной линии сигнала, распространяющегося в среде с “отрицательной температурой” / И.П. Мазанько // Оптика и спектроскопия, 1964. – Т. 17.- Вып. 2. – С. 203-208.
63. **Кробка, Н.И.** Влияние пространственной неоднородности сильного поля на спектральные характеристики спонтанного излучения: дипломная работа. – МФТИ. ФФКЭ, 1979. – 44 с.
64. **Курятов, В.Н., Наседкин, Е.Ф., Семенов, Б.Н., Журавлева, Е.Н.** Направление лазерной гироскопии высокой точности / Лазеры для мира и созидания. НИИ “Полнос” имени М.Ф. Стельмаха. 50 лет. – С. 76-82.
65. **Рытов, С.М.** Введение в статистическую радиофизику / С.М. Рытов. – М.: Наука, 1966. – 404 с.
66. **IEEE Std 952-1997.** IEEE Standard Specification Format Guide and Test Procedure for Single-Axis Interferometric Fiber Optic Gyros.
67. **IEEE Std 952-1997 (R2008).** IEEE Standard Specification Format Guide and Test Procedure for Single-Axis Interferometric Fiber Optic Gyros.
68. **Кробка, Н.И.** О понятии “модель ошибок” в лазерной гироскопии / Н.И. Кробка // Материалы XVIII научно-технич. конференции памяти Н.Н. Острякова. – СПб.: ЦНИИ «Электроприбор», 1993. – С. 49.
69. **About Fizoptika.** URL: <http://www.fizoptika.ru/about/index.html>.
70. **Кробка, Н.И.** Гироскопия на эффекте Саньяка: Вчера, сегодня и завтра / XII конф. молодых ученых “Навигация и управление движением”. – С.-Петербург: ЦНИИ «Электроприбор», 2010 [приглашенная лекция].
71. **Кробка, Н.И.** Экспериментальные исследования шумов ВОГ филиала ЦЭНКИ “НИИ ПМ имени академика В.И. Кузнецова”. – Филиал ЦЭНКИ НИИ ПМ им. акад. В.И. Кузнецова, КИНД. Э001.2402. – 2008. – 370 с.

72. **Бензин – ваш, идеи – наши.** URL: <http://dic.academic.ru/dic.nsf/proverbs/11939/>
73. **Topology.** URL: <https://en.wikipedia.org/wiki/Topology>.
74. **Кробка, Н.И.** On the influence of non-ideal onboard time scale on the structure of error equations and the accuracy of strapdown inertial navigation systems // 21st Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems. Proceedings. – Saint Petersburg: State Research Center of the Russian Federation Concern CSRI Elektropribor, JSC, 2014. – P. 361-364.
75. **Кробка, Н.И.** Дифференциальные методы идентификации структуры шумов гироскопов // Гироскопия и навигация. – 2011. – № 1. – С. 59-77.
76. **Кробка, Н.И.** The conditions for Euler-Poisson kinematic equations integrability in quadratures / N. I. Krobka // 5th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems. – Spb.: Scientific Council of the RAS on the Problem of Motion Control and Navigation. State Scientific Center of Russia - CSRI “Elektropribor”. – 1998. – P. 37-44.
77. **Кробка, Н.И.** Решение кинематической задачи Эйлера // Гироскопия и навигация. - 2005. - № 3. - С. 105-122.
78. **Кробка, Н.И.** Симметрия и асимметрия трехмерных вращений. Три редукции проблемы интегрирования кинематических уравнений в квадратурах / Н. И. Кробка // Науково-технічний збірник “Інформаційні системи, механіка та керування”. – 2012. – Вып. 7. – С. 05 [14 с.]. URL: [http://ismk.kpi.ua/sites/default/files/ISMC\\_7/p\\_05.pdf](http://ismk.kpi.ua/sites/default/files/ISMC_7/p_05.pdf).
79. **Mezentsev, A.P.** Development, production and test results for a medium-accuracy MEMS INS “AIST-320” based on Coliolic vibratory gyro “AIST-100” / A.P. Mezentsev, E.N. Frolov, M.Yu. Klimkin, O.A. Mezentsev // 14th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems. Proceedings. – Spb.: SRC of the RF CSRI “Elektropribor”, 2007. – P. 9-18.
80. **iSense. About us.** URL: <http://www.isense.ru/en/o-kompanii/>.
81. **Почему логика вещь железная?** URL: <http://otvet.mail.ru/question/45099950>.
82. **Анекдот от Балагура.** URL: <http://balagur.info/anec/2011-01-06/9323a002c0a9d6d9/>.
83. **Анекдот.** URL: [http://pikabu.ru/story/anekdot\\_1623090](http://pikabu.ru/story/anekdot_1623090)
84. **IEEE Std. 1554-2005.** IEEE Recommended Practice for Inertial Sensor Test Equipment, Instrumentation, Data Acquisition and Analysis.
85. **Lefevre, H.C.** The fiber-optic gyroscope: achievement and perspective // 19th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems. Proceedings / Editor-in-Chief Academician of RAS V.G. Peshekhonov. – Spb.: SRC of the RF Concern CSRI “Elektropribor”, JSC, 2007. – P. 122-126.
86. **Lefevre, H.C.** The Fiber-Optic Gyroscope, Artech House, Boston-London, 1993.
87. **Sanders, S.J., Strandjord, L.K., and Mead, D.** Fiber optic gyro technology trends – a Honeywell perspective // Optical Fiber Sensors Conference Technical Digest, 2002. OFS 2002, 15th. Vol. 1. – P. 5-8.
88. **Pavlath, G.A.** Fiber optic gyro based inertial navigation systems at Northrop Grumman // Optical Fiber Sensors Conference Technical Digest, 2002. OFS 2002, 15th. Vol. 1. – P. 9.
89. **Кробка, Н.И.** Quantum micro-mechanics: gyros based on de Broglie waves and quantum features of superfluid liquids. State of the arts and development tendencies / N. I. Krobka // Proceedings of the 16th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems. – Spb.: SRC of the RF CSRI “Elektropribor”, 2009. – P. 150-163.
90. **Vali, V., Shorthill, R.W.** Fiber Ring Interferometer // Appl. Opt. – 1976. – Vol. 15. – P. 1099-1099.
91. **Кробка, Н.И.** The features of calibration of three-axis laser gyros with single vibrator and with recessively rotating basis (30 and 20 years later) // 17th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems. Proceedings. – Spb.: State Research Center of the Russian Federation Concern CSRI Elektropribor, 2010. – P. 67-70.
92. **Allan’s TIME.** URL: <http://www.allanstime.com/>
93. **Research.** URL: <http://www.allanstime.com/Research/index.html>
94. **David W. Allan Publications.** URL: <http://www.allanstime.com/Publications/DWA/index.html>.
95. **It’s About Time.** URL: <http://itsabouttimebook.com/>
96. **Степанов, О.А.** Применение теории нелинейной фильтрации в задачах обработки навигационной информации. – СПб.: ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 2003, 370 с.
97. **Степанов, О.А.** Основы теории оценивания, с приложениями к задачам обработки навигационной информации. Ч. 1. Введение в теорию оценивания. Санкт-Петербург: ЦНИИ «Электроприбор», 2010. 509 с.
98. **Степанов, О.А.** Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации. Ч. 2. Введение в теорию фильтрации. – СПб.: ГНЦ РФ ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2012. 417 с.
99. **Степанов, О.А., Моторин, А.В.** Сравнение методов идентификации моделей ошибок датчиков, основанных на вариациях Аллана и алгоритмах нелинейной фильтрации // XXI Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. – СПб.: ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2014.-С. 98-103.
100. **Градштейн, И.С., Рыжик, И.М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / Изд. 4-е. – М.: Гос. изд-во физико-математической литературы. – 1963. – 1108 с.